Bernoulli Resolve

Matemática

6V

Volume 3

Sumário - Matemática

COMENTÁRIO E RESOLUÇÃO DE QUESTÕES

MÓDULO – A 05

Porcentagem

Exercícios de Fixação

Questão 01 – Letra A

Comentário: Sejam T_1, D_1 e V_1 o tempo, a distância e a velocidade no trajeto usual, respectivamente.

Sejam T_2, D_2 e V_2 o tempo, a distância e a velocidade no novo trajeto, respectivamente. Daí:

$D_2 = (1 + i)D_1 \Rightarrow D_2 = (1 + 0,2)D_1 \Rightarrow D_2 = 1,2D_1$ e

$V_2 = (1 + i)V_1 \Rightarrow V_2 = (1 + 1)V_1 \Rightarrow V_2 = 2V_1$

Temos $T_2 = \frac{D_2}{V_2} \Rightarrow T_2 = \frac{1,2D_1}{2V_1} \Rightarrow T_2 = 0,6\frac{D_1}{V_1}$.

Como $T_1 = \frac{D_1}{V_1}$, então $T_2 = 0,6T_1$.

Assim, o tempo no novo trajeto será 60% do trajeto usual, ou seja, houve uma redução de 40% no tempo de viagem.

Questão 02 – Letra C

Comentário: Seja P_c o preço de custo do produto. Para não ter prejuízo, o lojista vende seus produtos por $1,44P_c$.

Como os clientes gostam de obter descontos no momento da compra, então o lojista cria uma tabela de preços de venda acrescentando em 80% o preço de custo, ou seja, os produtos serão vendidos por $1,8P_c$.

Seja **x** o maior desconto que o lojista pode conceder ao cliente, sobre o preço de tabela, de modo a não ter prejuízo. Assim:

$(1 + x).(1,8P_c) = 1,44P_c \Rightarrow 1 + x = 0,8 \Rightarrow$

$x = -0,2 \Rightarrow x = -20\%$

Portanto, o lojista pode conceder ao cliente um desconto de 20%.

Questão 03 – Letra B

Comentário: Como o imóvel em São Paulo valorizou 10%, o valor de **x** é tal que $1,1.x = 495\,000 \Rightarrow x = 450\,000$. Já em Porto Alegre, houve uma desvalorização de 10% na venda, o que mostra que o valor de **y** é tal que:

$0,9.y = 495\,000 \Rightarrow y = 550\,000$

Questão 04

Comentário: Vamos organizar a seguinte tabela:

	Antes	Depois
Balas por pacote	n	1,2n
Preço do pacote	P	1,08P
Preço de cada bala	$\frac{P}{n}$	$\frac{1,08P}{1,2n}$

A promoção fez com que o preço de cada bala no pacote se tornasse igual a:

$\frac{1,08P}{1,2n} = 0,9\frac{P}{n}$

Logo, cada bala sofreu uma redução de 10% no seu preço.

Questão 05 – Letra B

Comentário: Para saber a porcentagem, dividimos o valor do acréscimo pelo valor total: $\frac{720}{24\,000} = 0,03 = 3\%$

Exercícios Propostos

Questão 01

Comentário: R$ 84,00 representam 50% do seu salário. Logo, seu salário é R$ 168,00.

Questão 02 – Letra C

Comentário: Consideremos **h** o número de homens e 500 – h o número de mulheres. De acordo com o problema, temos:

$$\frac{50}{100}.h + \frac{60}{100}.(500 - h) = 280$$
$$\frac{1}{2}.h + 300 - \frac{3}{5}.h = 280$$
$$-\frac{1}{10}.h = -20 \qquad h = 200$$

Logo, foram entrevistados 200 homens e 300 mulheres.

Questão 03

Comentário:

A) Perdeu 40% de 3 000 = 1 200
 Recuperou 30% de 1 200 = 360
 A pessoa ficou com 3 000 – 1 200 + 360 = 2 160 reais.

B) O prejuízo total foi de 3 000 – 2 160 = 840.
 Temos que $\frac{840}{3\,000} = 0,28$, ou seja, o prejuízo foi de 28%.

Questão 05 – Letra A

Comentário: Se **x** é o valor de consumo, 0,33x é o valor do imposto. Logo, o valor total corresponde a:

$x + 0{,}33x = 150{,}29 \Rightarrow 1{,}33x = 150{,}29 \Rightarrow x = 113$

Então, o tributo será de 150,29 – 113,00 = R$ 37,29.

Questão 06 – Letra D

Comentário: Em 30 litros, há 0,18.30 = 5,4 litros de álcool. Ao completar os 40 litros do tanque, teremos 20% de álcool, ou seja, 0,2.40 = 8 litros.

Portanto, devem ser adicionados 2,6 litros de álcool, que representam 26% do volume de 10 litros acrescido.

Questão 07 – Letra C

Comentário: Sejam:
V: preço de venda sem desconto;
C: preço de custo;
L: lucro.
Temos:

$$L = \underbrace{0{,}8V}_{\text{Preço de venda após desconto}} - C$$

Mas, L = 0,2C. Logo, temos:
$0{,}2C = 0{,}8V - C \Rightarrow 1{,}2C = 0{,}8V \Rightarrow V = 1{,}5C$
Se o desconto não fosse dado, o lucro seria igual a V – C = 1,5C – C = 0,5C, ou seja, 50% do preço de custo.

Questão 08 – Letra A

Comentário: Sejam **P** o preço unitário do produto e **n** o número de pessoas que o compraram. Após as modificações, o preço tornou-se 0,9P e o número de pessoas que o consumiam tornou-se 1,2n. O faturamento, que é dado pelo produto do preço pelo número de unidades vendidas tornou-se igual a 0,9P.1,2n = 1,08.P.n. Observe que P.n corresponde ao faturamento inicial. Portanto, podemos concluir que houve um aumento de 8% no faturamento.

Questão 12 – Letra D

Comentário: Sejam **V** o preço de venda e **C** o preço de custo.

V – C = 3 000

Após o desconto de 20%, o preço de venda passará a ser 0,8V. O lucro é dado por 0,8V – C, que representa 30% do preço de custo. Temos:

$0{,}8V - C = 0{,}3C \Rightarrow 0{,}8V - 1{,}3C = 0 \Rightarrow$

$8V - 13C = 0$

Resolvendo o sistema

$\begin{cases} V - C = 3\,000 \\ 8V - 13C = 0 \end{cases}$, temos C = 4 800 e V = 7 800.

Portanto, C + V = 4 800 + 7 800 = 12 600.

Questão 16 – Letra D

Comentário: Sejam:
x: valor da hora normal trabalhada;
y: valor da hora extra trabalhada;
S: salário diário (normal).
Temos:
S = 8x
Com as horas extras, temos:
$1{,}5S = 8x + 2y \Rightarrow 1{,}5.(8x) = 8x + 2y \Rightarrow$
$12x = 8x + 2y \Rightarrow 4x = 2y \Rightarrow y = 2x$
Portanto, a hora extra vale o dobro da hora normal, ou seja, 100% a mais.

Seção Enem

Questão 01 – Letra B

Eixo cognitivo: IV

Competência de área: 1

Habilidade: 4

Comentário: Sejam **H** o número de homens e **M** o número de mulheres.

Dado que 35% das mulheres e 12% dos homens não sentem vontade de fazer sexo, temos que o total de brasileiros com essa característica é de 35%M + 12%H. Portanto, a porcentagem de brasileiros sem vontade de fazer sexo é de:

$$\frac{35\%M + 12\%H}{M + H}$$

No entanto, de acordo com o enunciado, podemos considerar que H = M, e, então, temos que a porcentagem é de:

$$\frac{35\%H + 12\%H}{2H} = 23{,}5\% \cong 24\%$$

Questão 02 – Letra B

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 4

Habilidade: 16

Comentário: Sejam **P** a população total e **E** a energia total consumida.

- Considerando uma renda familiar maior do que vinte salários:

  Porcentagem da população $\rightarrow$ 0,05P

  Energia consumida $\rightarrow$ 0,10E

  Consumo por indivíduo $\rightarrow \dfrac{0{,}10E}{0{,}05P} = 2\dfrac{E}{P}$

- Considerando uma renda familiar de até três salários mínimos:

  Porcentagem da população $\rightarrow$ 0,50P

  Energia consumida $\rightarrow$ 0,30E

  Consumo por indivíduo $\rightarrow \dfrac{0{,}30E}{0{,}50P} = 0{,}6\dfrac{E}{P}$

  Portanto, temos: $\dfrac{2\frac{E}{P}}{0{,}6\frac{E}{P}} = \dfrac{2}{0{,}6}$ 3,3

Questão 03 – Letra D

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 6

Habilidade: 25

Comentário: A partir do gráfico, temos que o gás natural representa cerca de 21% da energia mundial, enquanto a energia nuclear representa cerca de 7%. Para substituir a energia nuclear, a energia proveniente do gás natural deve cobrir os 7% da energia nuclear. Como 7 representa $\frac{1}{3}$ de 21, o aumento deve ser de $\frac{1}{3} \cong 0{,}33 = 33\%$.

Questão 04 – Letra B

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 6

Habilidade: 25

Comentário: Em 1970, o consumo de energia elétrica era de, aproximadamente, 2,5 x 10^6 tep, enquanto o consumo total de energia era de, aproximadamente, 25 x 10^6 tep. Portanto, a participação da energia elétrica era de 10% da energia total. Já em 1995, o consumo de energia elétrica era aproximadamente igual a 20 x 10^6 tep, enquanto o consumo total era aproximadamente igual a 32 x 10^6 tep. Em termos percentuais, a energia elétrica representava:

$$\frac{20 \times 10^6 \text{ tep}}{32 \times 10^6 \text{ tep}} \cong 0{,}6 = 60\%$$

Portanto houve um aumento de 10% para 60%.

Questão 05 – Letra B

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 1

Habilidade: 3

Comentário: Seja **x** o total de eleitores. Temos:

$$\underbrace{0{,}51.0{,}8x}_{\text{Votos válidos}} = 0{,}408x \quad 0{,}41x$$

Logo, o resultado é da ordem de 41%.

Questão 06 – Letra C

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 1

Habilidade: 3

Comentário: Seja **x** o total arrecadado pelo colégio. Com reajuste, teríamos 0,05.0,4x = 0,02x, o que corresponde a apenas 2% de aumento sobre o valor arrecadado. Logo, um reajuste de 5% superaria em muito os gastos adicionais.

Questão 07 – Letra B

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 1

Habilidade: 3

Comentário:

Em cada semana, passam $\frac{30\ 000.7}{3}$ = 70 000 motoristas. Temos que 40% deles observam o painel eletrônico, ou seja, 0,4.70 000 = 28 000 motoristas.

Questão 08 – Letra E

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 1

Habilidade: 3

Comentário: O total de fumantes do grupo é igual a: 0,9.1 500 + 0,8.500 = 1 750

Questão 09 – Letra B

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 6

Habilidade: 25

Comentário:

- Famílias com renda de R$ 6 000,00:
  Gasto com alimentação → R$ 540,00 (9% de 6 000)
- Famílias com renda de R$ 400,00:
  Gasto com alimentação → R$ 132,00 (33% de 400)

Podemos concluir que os gastos com alimentação pela família de maior renda são aproximadamente quatro vezes maiores do que os gastos com alimentação da família de menor renda.

Questão 10 – Letra D

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 6

Habilidade: 25

Comentário: Observe que dos 112 jogadores, temos 54 + 14 = 68 jogadores que concluíram o Ensino Médio, ou seja, cerca de $\frac{68}{112} \cong 0{,}60 = 60\%$.

Questão 11 – Letra C

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 1

Habilidade: 3

Comentário: Sendo **q** a quantia aplicada, em reais, por essa pessoa, temos:

1° mês: a pessoa perdeu 30% do total investido, ou seja, perdeu 0,3q, ficando, então, com 0,7q;

2° mês: a pessoa recuperou 20% do que havia perdido, ou seja, 0,2(0,3q) = 0,06q.

Assim, depois desses dois meses, essa pessoa tem o equivalente a 0,7q + 0,06q = 0,76q.

Como o montante é de R$ 3 800,00, temos:

0,76q = 3 800 ⇒ q = 5 000

MÓDULO – A 06

Juros simples e compostos

Exercícios de Fixação

Questão 01 – Letra D

Comentário: Seja **P** o preço do produto. No pagamento à vista, temos 10% de desconto.

Assim, o preço real do produto é 0,9P.

O pagamento a prazo será feito em duas prestações mensais iguais sem desconto. Assim:

1° mês	2° mês
0,5P	0,5P

O verdadeiro preço do produto é 0,9P. No ato da compra, foi feito um pagamento de 0,5P, restando, assim, 0,4P para um mês depois. Logo:

(0,4P)(1 + i) = 0,5P ⇒ 1 + i = 1,25 ⇒

i = 0,25 ⇒ i = 25%

Portanto, no pagamento a prazo, paga-se uma taxa mensal de juros de 25%.

Questão 02 – Letra A

Comentário: Sejam J_1 e M_1, respectivamente, os juros e o montante atingido por João. Temos:

$J_1 = 520.0,03.6 = 93,60$ reais

$M_1 = 520 + 93,60 = 613,60$ reais

Sejam J_2 e M_2, respectivamente, os juros e o montante atingido pelo irmão de João. Temos:

$J_2 = 450.i.6 = 2\ 700i$

$M_2 = 450 + 2\ 700i$

Mas, $M_2 = M_1 = 613,60$. Logo:

$450 + 2\ 700i = 613,60 \Rightarrow 2\ 700i = 163,60 \Rightarrow$

$i \cong 0,06 = 6\%$ ao mês

Questão 03 – Letra D

Comentário: Sejam **x** o valor aplicado a 1,6% ao mês e 10 000 – x o valor aplicado a 2% ao mês. Temos:

$0,016x + 0,02.(10\ 000 - x) = 194 \Rightarrow x = 1\ 500$

Logo, foram aplicados R$ 1 500,00 e R$ 8 500,00 a 1,6% e 2%, respectivamente. O valor absoluto da diferença, em reais, é 8 500 – 1 500 = 7 000.

Questão 04 – Letra C

Comentário:

- Início de 2010:

  M = 5 160.1,2 = 6 192 reais

- Início de 2011:

  M = 6 192.1,2 = 7 430,40 reais

O juro recebido é igual a 7 430,40 – 6 192 = 1 238,40 reais.

Questão 05

Comentário: Juros compostos.

A) Em 60 dias, teremos 2 meses. Daí:

$27\ 300(1 + i)^2 = 27\ 300(1 + 0,3)^2 =$

$27\ 300(1,3)^2 = 46\ 137$

B) $\dfrac{27\ 300}{(1+i)} = \dfrac{27\ 300}{(1+0,3)} = \dfrac{27\ 300}{1,3} = 21\ 000$

Exercícios Propostos

Questão 01 – Letra E

Comentário: Ao levarmos 3 produtos, deveríamos pagar o valor correspondente aos 3. Como ganhamos 1 produto, obtivemos um desconto de $\frac{1}{3}$, ou seja, $\frac{100}{3}\%$.

Questão 02 – Letra B

Comentário: Seja **p** o preço de um produto de referência. Considere que uma pessoa possua **p** reais e os aplique. Daqui a um ano, essa pessoa terá 1,26p reais. Porém, devido à inflação, o preço do produto passará a ser 1,20p.

Observe que $\dfrac{1,26p}{1,20p} = 1,05$, ou seja, o rendimento efetivo foi de 5%.

Questão 04 – Letra A

Comentário: Se **x** é o valor de cada uma das **n** parcelas e **T** o total pago pelo produto, temos:

T = n.x

- Pagando-se 3 parcelas a menos:

  T = (n – 3).(x + 60)

- Pagando-se 5 parcelas a menos:

  T= (n – 5).(x + 125)

Temos:

$(n - 3).(x + 60) = (n - 5).(x + 125) \Rightarrow$

$nx + 60n - 3x - 180 = nx + 125n - 5x - 625 \Rightarrow$

$2x = 65n - 445 \Rightarrow x = \dfrac{65n - 445}{2}$

Além disso, temos:

$nx = (n - 5).(x + 125) \Rightarrow nx = nx + 125n - 5x - 625 \Rightarrow$

$25n - x - 125 = 0 \Rightarrow 25n - 125 = x$

Igualando as duas equações, temos:

$25n - 125 = \dfrac{65n - 445}{2} \Rightarrow 50n - 250 = 65n - 445 \Rightarrow$

$15n = 195 \Rightarrow n = 13$

Questão 07 – Letra B

Comentário: Seja **C** o capital investido mensalmente. Temos:

M = 1 000 000

i = 1% a.m.

$1\ 000\ 000 = C.1,01^{360} + C.1,01^{359} + C.1,01^{358} + ... + C.1,01^1 \Rightarrow$

$1\ 000\ 000 = C.\underbrace{(1,01^{360} + 1,01^{359} + 1,01^{358} + ... + 1,01^1)}_{\text{Soma dos 360 termos de uma P.G. de razão 1,01}}$

$1\ 000\ 000 = C.\dfrac{1,01.(1,01^{360} - 1)}{1,01 - 1} \Rightarrow$

$1\ 000\ 000 = C.\dfrac{1,01^{361} - 1,01}{0,01} \Rightarrow$

$1\ 000\ 000 = C.\dfrac{36 - 1,01}{0,01} \Rightarrow 1\ 000\ 000 = C.3\ 499 \Rightarrow$

$C = 285,796 \cong 286$ reais

Questão 09 – Letra D

Comentário: Seja **x** o valor atual do produto. Então, o seu valor há algum tempo era igual a 0,8x. O aumento percentual é dado pela razão $\dfrac{x}{0,8x} = 1,25$, ou seja, 25%.

Questão 10 – Letra C

Comentário:

$\underbrace{x(1+0,1)^2}_{\text{Montante referente ao valor depositado hoje}} + \underbrace{x(1+0,1)^1}_{\text{Montante referente ao valor depositado daqui a um ano}} = 46\ 200$

$1,21x + 1,1x = 46\ 200 \Rightarrow 2,31x = 46\ 200 \Rightarrow x = 20\ 000$

Portanto, **x** é um número cuja soma dos algarismos da parte inteira é igual a 2.

Questão 15 – Letra A

Comentário:

$M = C(1 + i)^t \Rightarrow 518\ 400 = 250\ 000(1 + i)^2 \Rightarrow (1 + i)^2 = 2,0736 \Rightarrow$

$1 + i = 1,44 \Rightarrow i = 0,44 = 44\%$

Questão 19 – Letra C

Comentário:

$3\,900 = 1\,200.(1 + i)^2 + 1\,200.(1 + i) + 1\,200 \Rightarrow$

$3\,900 = 1\,200.[(1 + i)^2 + 1 + i + 1] \Rightarrow$

$\frac{13}{4} = i^2 + 2i + 1 + 1 + i + 1 \Rightarrow \frac{13}{4} = i^2 + 3i + 3 \Rightarrow$

$4i^2 + 12i + 12 = 13 \Rightarrow 4i^2 + 12i - 1 = 0 \Rightarrow$

$\Delta = (12)^2 - 4.4.(-1) = 144 + 16 = 160$

$$i = \frac{-12 \pm 4\sqrt{10}}{8} \Rightarrow \begin{cases} \frac{-3 + \sqrt{10}}{2} \text{ (convém)} \\ \frac{-3 - \sqrt{10}}{2} \text{ (não convém)} \end{cases}$$

Questão 22 – Letra C

Comentário: Em um regime de juros compostos, temos: C = 10 000; i = 0,015 e t = 20

Assim, o montante é expresso por:

$M = 10\,000(1 + 0{,}015)^{20} \quad M = 10\,000(1{,}015)^{20}$

$M = 10\,000\,[\underbrace{(1{,}015)^{10}}_{1{,}16}]^2 \quad M = 10\,000[1{,}16]^2$

$M = 10\,000.1{,}3456 \quad M = 13\,456$

Questão 23 – Letra D

Comentário: Após um ano, César tem um montante $M_1 = 10\,000(1 + i)$. Ao sacar R$ 7 000,00, sua aplicação após mais um ano passa a ser R$ 6 000,00. Então:

$M_2 = 6\,000 \quad M_2 = (10\,000(1 + i) - 7\,000)(1 + i)$

$6\,000 = (10\,000 + 10\,000i - 7\,000)(1 + i)$

$6\,000 = 1\,000(3 + 10i).(1 + i) \quad 6 = 3 + 3i + 10i + 10i^2$

$$10i^2 + 13i - 3 = 0 \quad \begin{cases} i = 0{,}2 \\ \text{ou} \\ i = -1{,}5 \end{cases}$$

Como **i** é positivo, i = 0,2, logo:

$(4i - 1)^2 = (4.0{,}2 - 1)^2 = (-0{,}2)^2 = 0{,}04$

Questão 24 – Letra C

Comentário: Bruno, há um ano, comprou uma casa de R$ 50 000. Para isso, tomou emprestados R$ 10 000 de Edson e R$ 10 000 de Carlos. Logo, Bruno já tinha o equivalente a R$ 30 000.

Bruno combinou com Edson e Carlos pagar-lhes juros de 5% e 4% em um ano, respectivamente.

Assim, após um ano, Bruno deve a Edson e a Carlos o equivalente a:

- Edson: 10 000.(1,05) = 10 500
- Carlos: 10 000.(1,04) = 10 400

Com a venda da casa, que valorizou 3% durante o ano, Bruno obteve 50 000.(1,03) = R$ 51 500.

Após a venda, Bruno pagou o que devia a Edson e a Carlos e subtraiu o que tinha inicialmente para a compra da casa: 51 500 – (10 500 + 10 400 + 30 000) = 51 500 – 50 900 = 600

Portanto, Bruno lucrou o equivalente a R$ 600,00.

Questão 25

Comentário: Vamos considerar o seguinte esquema.

à vista	**P**
entrada	100
saldo devedor	P – 100
saldo devedor 30 dias depois (10% de juros)	1,1(P – 100) = 1,1P – 110
2ª parcela	240
saldo devedor	1,1P – 110 – 240 = 1,1P – 350
saldo devedor 30 dias depois (10% de juros)	1,1(1,1P – 350) = 1,21P – 385
3ª parcela	220
saldo devedor	0

Logo:

$1{,}21P - 385 - 220 = 0 \Rightarrow 1{,}21P = 605 \Rightarrow P = 500$

O valor de venda à vista dessa mercadoria é R$ 500,00.

Seção Enem

Questão 01 – Letra C

Eixo cognitivo: IV

Competência de área: 1

Habilidade: 4

Comentário: O investimento **A** tem uma rentabilidade anual de $(1{,}03)^{12} - 1 = 1{,}426 - 1 = 0{,}426 = 42{,}6\%$.

O investimento **B** tem uma rentabilidade anual de $(1{,}36)^1 - 1 = 1{,}36 - 1 = 0{,}36 = 36\%$.

O investimento **C** tem uma rentabilidade anual de $(1{,}18)^2 - 1 = 1{,}3924 - 1 = 0{,}3924 = 39{,}24\%$.

Portanto, o investimento em **A** é o que tem a maior rentabilidade anual (42,6%) em relação aos demais.

Questão 02 – Letra D

Eixo cognitivo: IV

Competência de área: 1

Habilidade: 4

Comentário: Aplicando R$ 500,00 na poupança, com rendimento mensal de 0,560%, o montante, em reais, será de: 500,00.(1,00560) = 502,80

Aplicando R$ 500,00 no CBD, com rendimento mensal de 0,876%, o juros ou o ganho, em reais, será de: 500,00.(0,00876) = 4,38

Como o imposto de renda no CBD é de 4% sobre o ganho, temos que o montante, em reais, será de: 500,00 + 4,38.(0,96) = 504,21

Portanto, a aplicação mais vantajosa é a do CBD, pois o montante é maior.

Questão 03 – Letra C

Eixo cognitivo: IV

Competência de área: 1

Habilidade: 4

Comentário:

$M = C(1 + i)^t \Rightarrow M = 20\,000(1 + 0,02)^t \Rightarrow M = 20\,000(1,02)^t$

Fazendo t = 3, temos:

$M = 20\,000(1,02)^3 \cong 21\,225$ reais

Esse valor é o suficiente para comprar o carro e ainda sobram R$ 225,00.

MÓDULO – B 05

Regra de três

Exercícios de Fixação

Questão 01 – Letra A

Comentário: Regra de três simples:

	Datilógrafos	Símbolos digitados	Tempo (minutos)
1ª situação	13	13 013	13
2ª situação	1	x	1

Comparando as grandezas datilógrafos e tempo com a grandeza símbolos digitados, temos que essas grandezas são diretamente proporcionais. Assim:

$\frac{13\,013}{x} = \frac{13}{1} \cdot \frac{13}{1} \quad x = 77$

Portanto, são digitados 77 símbolos por cada datilógrafo em um minuto.

Questão 02 – Letra C

Comentário: Regra de três composta:

Operários	Pares de calçados	Horas/dia
16	120	8
x	300	10

Quanto maior a produção de calçados, mais funcionários serão necessários (grandezas diretamente proporcionais). Considerando as horas de trabalho diárias e o aumento da jornada de trabalho, serão necessários menos funcionários para realizar a tarefa, ou seja, grandezas inversamente proporcionais.

Assim:

$\frac{16}{x} = \frac{120}{300} \cdot \frac{10}{8} \quad 1\,200x = 2\,400.16 \quad x = 32$ operários

Questão 03 – Letra B

Comentário: Sabemos que, para um mesmo comprimento de tecido que passa pela máquina, quanto maior o raio do cilindro, menos voltas ele dá. Assim:

Rolo	Raio	Voltas/minuto
4º	↑ 10 cm	↓ 10
1º	80 cm	x

$\frac{x}{10} = \frac{10}{80} \quad x = \frac{10.10}{80} \quad x = 1,25 \frac{\text{voltas}}{\text{minuto}}$

Logo, em 12 horas, o primeiro rolo dará:

Voltas	Minutos
↓ 1,25	↓ 1
y	12.60

$\frac{1,25}{y} = \frac{1}{12.60} \Rightarrow y = 1,25.12.60 \Rightarrow y = 900$ voltas

Questão 04 – Soma = 10

Comentário: Nesse problema, estamos relacionando tempo e velocidade. Trata-se de grandezas inversamente proporcionais. Sendo assim, vamos analisar cada item:

01. Falso.

Com velocidade de 375 páginas por hora, consideremos **x** o tempo gasto.

$\frac{4}{x} = \frac{375}{300} \quad x = 3,2$ h $\quad x = 3$ horas e 12 minutos

02. Verdadeiro.

Para um serviço feito em 2,5 horas, seja **v** a velocidade de trabalho da máquina.

$\frac{4}{2,5} = \frac{v}{300} \quad v = 480$ páginas por hora

04. Falso.

Se a velocidade da máquina for de 250 páginas por hora, temos:

$\frac{4}{x} = \frac{250}{300} \quad x = 4,8$ horas $\quad x = 4$ horas e 48 minutos

08. Verdadeiro.

Como são grandezas inversamente proporcionais, se a velocidade da máquina dobrar, o tempo gasto será reduzido à metade, ou seja, será feito em 2 horas.

Questão 05 – Letra B

Comentário: Analisando a relação entre a massa (em gramas) e o tempo (em anos) dessa substância, descrita no gráfico, observamos que quanto maior o tempo, isto é, quanto mais o tempo passa, menor é a quantidade dessa substância. Logo, massa e tempo são inversamente proporcionais. Assim, para sabemos qual o tempo necessário para que essa substância se reduza a 2,5 gramas, pegamos um ponto do gráfico e montamos a tabela.

Massa (g)	Tempo (anos)
↑ 20	↓ 10
2,5	x

$\frac{x}{10} = \frac{20}{2,5} \quad x = \frac{20.10}{2,5} \quad x = 80$ anos

MATEMÁTICA

Exercícios Propostos

Questão 01 – Letra C

Comentário: Com base nas informações dadas, temos que a produção de cana-de-açúcar por hectare é $\frac{7\,500}{3\,000} = 2{,}5$ vezes maior que a de milho. Sabendo que a área é diretamente proporcional à produtividade de cada cultura e que ao plantio de milho couberam 400 hectares, resta à cana-de-açúcar uma área de 2,5.400 = 1 000 hectares.

Portanto, a usina tem x = 400 + 1 000 = 1 400 ha plantados, o que corresponde a $1{,}4 \times 10^7$ m^2.

Questão 02 – Letra B

Comentário: Em um grupo de 3 000 pessoas, 25% têm Ensino Médio:
25%.3 000 = 750 pessoas
A cada 100 pessoas com Ensino Médio, 54 conseguem emprego; logo:

100 ------ 54
750 ------ x

$$\frac{x}{54} = \frac{750}{100} \qquad x = \frac{54.750}{100} \qquad x = 405$$

Portanto, de acordo com os dados da pesquisa, 405 pessoas irão conseguir emprego.

Questão 06 – Letra E

Comentário: De acordo com os dados da questão, em 6 horas temos um escoamento de 240 litros. Sabendo que a vazão é constante e que corresponde ao volume pelo tempo, podemos estimar o tempo em que a água no interior do tanque demorou para se reduzir à metade:

$$\frac{240 \text{ litros}}{6 \text{ horas}} = \frac{1\,000 \text{ litros}}{x} \qquad x = 25 \text{ horas}$$

Logo, se às 8 horas de certo dia o tanque estava cheio de água, se reduziu a 1 000 litros às 9 horas do dia seguinte.

Questão 08 – Letra B

Comentário: Se 6 pessoas, trabalhando 4 horas por dia, realizam um trabalho em 15 dias, temos que o trabalho é executado em 15.4 horas, ou seja, 60 horas.

Sendo **x** o total de horas a serem trabalhadas pelas 8 pessoas, temos:

	Total de pessoas	Total de horas
1ª Situação	6	60
2ª Situação	8	x

O total de horas a serem trabalhadas é inversamente proporcional ao número de pessoas. Assim:

$$\frac{6}{8} = \frac{x}{60} \Rightarrow x = 45 \text{ horas}$$

Portanto, serão necessárias 45 horas.

Questão 11 – Letra E

Comentário: Quanto maior o número de robôs, menos tempo será gasto na montagem. Daí:

N. de robôs	Tempo gasto na montagem (h)
↑ 12 9	↓ 21 x

$$\frac{x}{21} = \frac{12}{9} \qquad x = \frac{21.12}{9} \qquad x = 28 \text{ horas}$$

Portanto, 9 desses robôs realizam a mesma tarefa em 28 horas.

Seção Enem

Questão 01 – Letra D

Eixo cognitivo: IV

Competência de área: 3

Habilidade: 13

Comentário: A proposta da cooperativa, uma jornada de 6 horas por dia, oferece uma colheita de 20 hectares por dia. Portanto, em 6 dias, seriam colhidos 120 hectares.

O preço total dessa proposta seria:

- Custo dos trabalhadores:
  R$ 120,00 por dia (12 trabalhadores)
- Custo das máquinas:
  R$ 4 000,00 por dia (4 máquinas)
- Custo total diário: R$ 4 120,00
- Custo por 6 dias: R$ 24 720,00

Assim, o valor total está dentro da oferta do fazendeiro.

Considerando que o aumento da jornada de trabalho para 9 horas diárias não encareça a proposta da cooperativa e que o ritmo de trabalho seja o mesmo, temos:

Área colhida em 6 dias com jornada de 9 horas:

$$\frac{9}{6}.120 = 180 \text{ hectares}$$

Dessa forma, a única alternativa que propõe o aumento de colheita desejado, sem que os custos excedam o valor proposto, é a letra D.

Questão 02 – Letra E

Eixo cognitivo: IV

Competência de área: 6

Habilidade: 26

Comentário: A capacidade de abastecimento dos mananciais é de 6 milhões de litros de água por dia, e a prefeitura visa a um consumo médio de 150 litros por dia, por habitante. Assim, com essa capacidade, os mananciais são capazes de abastecer:

N. de habitantes	Consumo diário de água (litros)
↓ 1 x	↓ 150 6 000 000

$$\frac{1}{x} = \frac{150}{6\,000\,000} \qquad x = \frac{6\,000\,000}{150} \qquad x = 40\,000 \text{ habitantes}$$

Considerando que, em 2003, a população era de 28 000 habitantes, e que a cada dois anos aumenta-se 2 000 habitantes, temos 40 000 – 28 000 = 12 000 habitantes.

$$\frac{12\,000}{2\,000} = 6 \text{ anos} \quad \Rightarrow \quad 2\,003 + 6 = 2\,009$$

Portanto, os mananciais serão suficientes para abastecer a cidade até o final de 2009.

Questão 03 – Letra A

Eixo cognitivo: IV

Competência de área: 3

Habilidade: 13

Comentário: Sabe-se que nos primeiros 10 dias, 20 alunos trabalharam 3 horas diárias e que foram arrecadados, diariamente, 12 kg de alimentos. Assim, temos:

Total de alimentos colhidos por aluno, por hora:

$$\frac{12}{3.20} = 0{,}2 \text{ kg}$$

Dessa maneira, a quantidade total de alimentos arrecadados durante os 10 primeiros dias foi de 120 kg.

Considerando que o ritmo de coleta tenha se mantido constante, a quantidade arrecadada por dia, nos 20 dias restantes, foi de:

$$(20 + 30).4.0{,}2 = 40\,\frac{\text{kg}}{\text{dia}}$$

Assim, nesse período, foram arrecadados 800 kg de alimentos.

Portanto, o total de alimentos arrecadados, durante os 30 dias de campanha, foi de 920 kg.

Questão 04 – Letra D

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 4

Habilidade: 16

Comentário: Primeiro, calculamos quantos kg de carvão são necessários para gerar 200 mil MWh de energia elétrica em um único dia.

kg de carvão	Quantidade de energia
↓ 1	↓ 10 kWh
x	200 mil MWh

$$\frac{1}{x} = \frac{10 \times 10^3 \text{ Wh}}{200\,000 \times 10^6 \text{ Wh}} \qquad x = \frac{200\,000 \times 10^6}{10 \times 10^3}$$

$$x = 20 \times 10^6 \text{ kg de carvão} = 200\,000 \text{ toneladas de carvão}$$

Agora, calculamos quantos caminhões de carvão são necessários para abastecer as termoelétricas a cada dia:

N. de caminhões	Toneladas de carvão transportadas
↓ 1	↓ 10
y	20 000

$$\frac{1}{y} = \frac{10}{20\,000} \qquad y = \frac{20\,000}{10} \qquad y = 2\,000 \text{ caminhões}$$

Questão 05 – Letra D

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 4

Habilidade: 16

Comentário: Se um trabalhador produz 8 toneladas de cana em um dia de trabalho e recebe R$ 2,50 por tonelada, ele recebe 8.2,50 = 20,00 reais por esse dia. Por essas 8 toneladas, o valor do álcool produzido será 8.100.1,20 = 960,00 reais.

Logo, $\dfrac{960 \text{ reais}}{20\,\dfrac{\text{reais}}{\text{dia}}} = 48 \text{ dias}$.

Questão 06 – Letra B

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 5

Habilidade: 21

Comentário: Como informado no enunciado, o volume de demanda de água diária (V_d) = 2 000 litros, o número de dias de armazenagem (N_{dia}) = 15, e a precipitação média diária é de 110 mm, ou seja, 1,1 dm. Logo:

V_c = 2 000.15.1,1 = 33 000 litros

Portanto, para a área **A** do telhado, temos:

$A = \dfrac{V_c}{110} = \dfrac{33\,000}{110} = 300\,\text{m}^2$, que corresponde a dimensões mínimas de 15 metros por 20 metros.

Questão 07 – Letra D

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 4

Habilidade: 16

Comentário:

$$2\,\frac{\text{banho}}{\text{dia}}.10\,\text{minutos}.7\,\text{dias}.\frac{4{,}8\text{ kW}}{60\,\text{minutos}} = 11{,}2\text{ kW}$$

Questão 08 – Letra D

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 5

Habilidade: 21

Comentário: Podemos relacionar o preço e a quantidade de tíquetes por meio de uma regra de três simples:

Preço (R$)	Tíquetes
3,00	20
x	9 200

$$\frac{3}{x} = \frac{20}{9\,200} \qquad x = 1\,380{,}00$$

Assim, para trocar os tíquetes pela bicicleta, será necessário desembolsar R$ 1 380,00.

Questão 09 – Letra A

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 5

Habilidade: 21

Comentário: Regra de três simples:

Gotas	Massa corporal (kg)
5	2
30	x

$$\frac{5}{30} = \frac{2}{x} \qquad x = 12$$

Logo, a massa corporal do filho é de 12 kg.

MÓDULO – B 06

Geometria de posição e poliedros

Exercícios de Fixação

Questão 01 – Letra C

Comentário: Vamos analisar as afirmativas:

I. Falsa. As retas podem ser reversas.

II. Falsa. Três pontos distintos entre si só determinam um único plano se não forem colineares.

III. Verdadeira.

IV. Verdadeira.

Questão 02 – Letra C

Comentário:

I) Falso, pois duas retas reversas não se interceptam e não são paralelas.

II) Falso, pois duas retas paralelas não se interceptam e não são reversas entre si, pois existe um plano que as contém.

III) Falso, pois podemos ter uma reta secante a um plano (formando um ângulo diferente de 90° com o plano), mas que seja perpendicular a uma reta desse plano.

IV) Falso, pois pode haver uma reta perpendicular à reta dada e paralela ao plano dado.

Questão 03 – Letra A

Comentário:

A) Verdadeiro. Dado um plano α e uma reta **r** quaisquer, existe um plano β que contém **r**, tal que $\beta \perp \alpha$.

B) Falso. Contraexemplo: seja $r \perp \alpha$. Logo, existem infinitos planos perpendiculares a α que contêm **r**.

C) Falso. Contraexemplo: se **r** e α são secantes, então não existe um plano β que contém **r**, tal que $\beta // \alpha$.

D) Falso. Contraexemplo: tome a reta **r** secante ao plano α. Logo, não existe nenhum plano que contém **r** que seja paralelo a α.

E) Falso. Contraexemplo: seja $r // \alpha$. Logo, existe um plano β que contém **r**, tal que $\beta // \alpha$.

Questão 04 – Letra E

Comentário: Sabemos que o poliedro possui duas faces pentagonais e cinco quadrangulares. Assim, o número de faces é 2 + 5 = 7.

Como duas faces sempre possuem uma aresta em comum, o número de arestas pode ser calculado da seguinte maneira:

$$A = \frac{2.5 + 5.4}{2} \qquad A = 15$$

Logo, pela Relação de Euler, temos:

$V - A + F = 2 \Rightarrow V = 2 + 15 - 7 \Rightarrow V = 10$

Questão 05 – Letra E

Comentário: A Relação de Euler vale para todo poliedro convexo.

Assim, para o poliedro de 20 arestas **A** e 10 vértices **V**, temos:

$V - A + F = 2 \Rightarrow 10 - 20 + F = 2 \Rightarrow F = 12$

Sejam **t** e **q** o número de faces triangulares e quadrangulares, respectivamente.

Como F = 12, então t + q = 12 e, como A = 20, então:

$$\frac{t.3 + q.4}{2} = 20$$

Resolvendo o sistema $\begin{cases} t + q = 12 \\ 3t + 4q = 40 \end{cases}$, temos q = 4 e t = 8.

Portanto, o poliedro convexo tem 8 faces triangulares.

Exercícios Propostos

Questão 03 – Letra B

Comentário:

I. Verdadeira. Duas retas perpendiculares a um mesmo plano são paralelas uma a outra, e retas paralelas são coplanares.

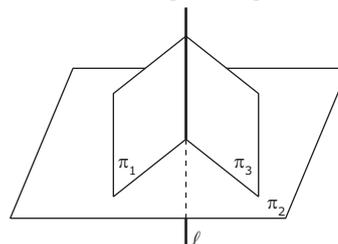
II. Falsa. Se duas retas são paralelas a um plano, não são, necessariamente, paralelas entre si, pois também podem ser coplanares concorrentes ou reversas.

III. Falsa. Considere, por exemplo, um triângulo ABC contido em um plano δ. Sejam α, β, e γ os planos perpendiculares a δ definidos por BC, AC e AB, respectivamente. α intercepta β e γ segundo retas paralelas, mas evidentemente β não é paralelo a γ.

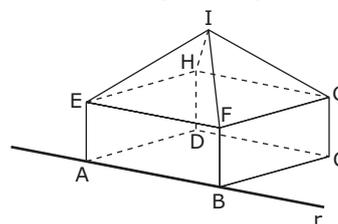
Questão 04 – Letra E

Comentário: A alternativa incorreta é a letra E, pois a intersecção de dois pontos concorrentes forma uma reta que possui infinitos pontos.

Questão 05 – Letra D

Comentário: Considere a seguinte figura.

Como a reta $\ell = \pi_1 \cap \pi_3$, então $\ell \perp \pi_2$, pois $\pi_1 \perp \pi_2$ e $\pi_2 \perp \pi_3$, por hipótese.

Questão 06 – Letra C

Comentário: Considere a figura a seguir com seus dados.

As retas suportes das arestas do sólido que são reversas com a reta **r** (não existe um único plano que as contenha) são: IE, IF, IG, IH, EH, FG, DH, CG

Portanto, temos 8 retas.

Questão 09 – Letra D

Comentário: Considerando que o poliedro regular tem 12 vértices e 30 arestas, podemos encontrar o seu número de faces pela Relação de Euler:

$V - A + F = 2 \Rightarrow F = 2 - 12 + 30 \Rightarrow F = 20$

Assim, podemos afirmar que o poliedro é um icosaedro.

Questão 13 – Letra C

Comentário: Em 20 faces hexagonais, temos 120 lados, e, em 12 faces pentagonais, temos 60 lados. O total de lados é, então, igual a 180. Cada lado é comum às duas faces, e, portanto, foi contado duas vezes. Assim, o número de arestas **A** é tal que:

$2A = 180 \Rightarrow A = 90$

Aplicando a Relação de Euler a esse poliedro convexo, temos:

$V - A + F = 2 \Rightarrow V - 90 + 32 = 2 \Rightarrow V = 60$

Portanto, a bola de futebol tem 60 vértices.

Questão 14 – Letra E

Comentário: Como o poliedro é convexo, ele é euleriano, e, então, V + F = A + 2. Como o poliedro só tem faces triangulares e faces quadrangulares, F = q + t.

Combinando as duas equações anteriores e substituindo os dados do problema, resulta q + t = 32 + 2 – 14 = 20.

Como cada face triangular tem três arestas, cada face quadrangular tem quatro arestas, e o total de arestas do poliedro é metade da soma dos números de arestas de cada face (pois cada aresta pertence a duas faces e, portanto, é contada duas vezes), então $A = \frac{3t + 4q}{2}$. Como o poliedro tem 32 arestas, temos então 3t + 4q = 64. Temos, finalmente, o sistema:

$$\begin{cases} q + t = 20 \\ 4q + 3t = 64 \end{cases} \quad q = 4 \text{ e } t = 16$$

Seção Enem

Questão 01 – Letra D

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 2

Habilidade: 8

Comentário: Como temos um poliedro de 7 faces e 15 arestas, então, da Relação de Euler, temos que o número de vértices é:

$V - A + F = 2 \Rightarrow V - 15 + 7 = 2 \Rightarrow V = 10$

Como em cada vértice temos 3 parafusos, então:

10.3 = 30 parafusos

Questão 02 – Letra E

Eixo cognitivo: II

Competência de área: 2

Habilidade: 7

Comentário: Dos sólidos dados, o único que não tem entrelaçamentos de arestas, o que facilita sua construção, é o da alternativa E.

Questão 03 – Letra E

Eixo cognitivo: I

Competência de área: 2

Habilidade: 6

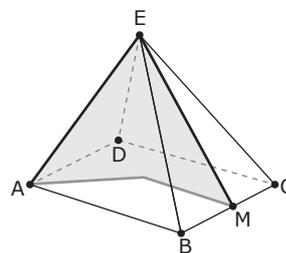
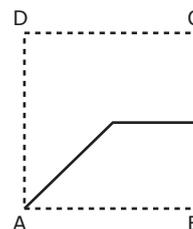
Comentário: A menor distância possível entre dois pontos é uma reta. Nesse caso, planificando a parede e o teto (como mostrado nas alternativas), temos que a reta é representada pela alternativa E.

Questão 04 – Letra C

Eixo cognitivo: I

Competência de área: 2

Habilidade: 6

Comentário: Observe, na figura a seguir, a projeção ortogonal, no plano da base, do trajeto descrito por João.

Portanto, o desenho que Bruno deverá fazer é:

MÓDULO – C 05

Função quadrática

Exercícios de Fixação

Questão 01 – Letra C

Comentário: Os valores de **x** para os quais f(x) = g(x) são tais que:

$2 + x^2 = 2 + x \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1$

Questão 02 – Letra C

Comentário: Para encontrar a rentabilidade máxima, é necessário encontrar uma função do 2º grau côncava para baixo.

N. de passageiros	Valor pago
1	1.55 + [(54 – 1).2,5].1
2	2.55 + [(54 – 2).2,5].2
3	3.55 + [(54 – 3).2,5].3
⋮	⋮
x	x.55 + [(54 – x).2,5].x

Assim, a rentabilidade **R** em função do número **x** de pessoas é:

$R(x) = 55x + [(54 - x).2,5].x \Rightarrow$

$R(x) = 55x + 135x - 2,5x^2 \Rightarrow$

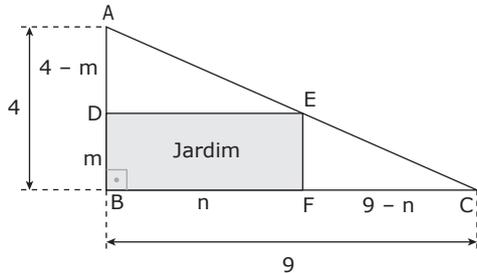
$R(x) = -2,5x^2 + 190x;\ x \geq 1$

O número de passageiros que dá à empresa uma rentabilidade máxima é x_v. Assim:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{190}{2(-2,5)} = 38$$

Portanto, a empresa terá um lucro máximo se 38 pessoas forem à excursão.

Questão 03 – Letra A

Comentário: Pela geometria do problema, temos a seguinte situação:

Como Δ ADE ~ Δ ABC:

$$\frac{4-m}{4} = \frac{n}{9} \qquad 4n = 9(4-m) \qquad n = \frac{36-9m}{4} \qquad n = -\frac{9m}{4} + 9$$

A área do jardim é dada pelo produto mn. Assim, temos:

$$A = mn \qquad A = m\ -\frac{9m}{4} + 9 \qquad A = -\frac{9m^2}{4} + 9m$$

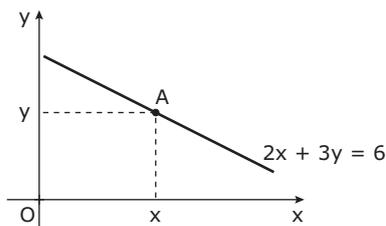
A maior área possível encontra-se no vértice da parábola, logo:

$$m = -\frac{b}{2a} \qquad m = -\frac{9}{2\ -\frac{9}{4}} = 2.$$

Como $n = -\frac{9m}{4} + 9$, então n = 4,5.

Portanto, as dimensões do jardim são 2 m e 4,5 m.

Questão 04 – Letra C

Comentário:

Seja **A** o quarto vértice. **A** pertence à reta 2x + 3y = 6. Logo:

$y = -\frac{2}{3}x + 2$ (I)

A área do retângulo é dada por S = x.y.

Substituindo (I) nessa expressão, temos:

$$S = x\ -\frac{2}{3}x + 2 \ \Rightarrow S = -\frac{2}{3}x^2 + 2x$$

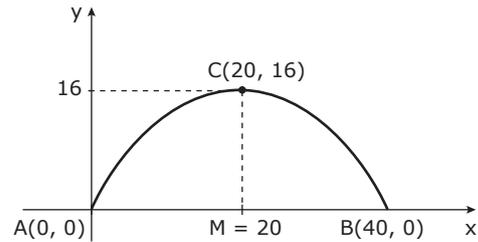
A dimensão **x** que corresponde à área máxima é dada por:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{-2}{2\ -\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

Logo, $y = -\frac{2}{3}.\frac{3}{2} + 2 = 1$

O perímetro do retângulo é $2.\frac{3}{2} + 2.1 = 5$

Questão 05 – Letra A

Comentário: Analisar o gráfico da parábola.

A parábola tem equação $f(x) = ax^2 + bx + c$, ou $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, em que x_1 e x_2 são raízes.

Com base no gráfico, deduzimos que $x_1 = 0$ e $x_2 = 40$ são raízes da função.

Assim, $f(x) = a(x - 0)(x - 40) \Rightarrow f(x) = ax(x - 40)$.

O ponto $C = (20, 16) \in f$.

Logo, $16 = a.20.(20 - 40) \Rightarrow a = -\frac{1}{25}$.

Assim, $f(x) = -\frac{1}{25}x.(x - 40)$.

Logo, $f(15) = -\frac{1}{25}.15.(15 - 40) \Rightarrow f(15) = 15$.

Portanto, a altura do arco é 15 cm para um ponto que dista 5 cm de **M**.

Exercícios Propostos

Questão 01 – Letra C

Comentário: Como o gráfico de **f** passa pelos pontos (–2, 0) e (0, 2) segue que f(x) = x + 2. Além disso, como o gráfico de **g** passa pelos pontos (0, 0) e (1, 0) temos:

$g(x) = ax^2 + bx$

$g(1) = 0 \Rightarrow g(1) = a + b = 0 \Rightarrow b = -a$

$g(x) = ax^2 - ax$

Então:

$h(x) = x + 2 + ax^2 - ax \Rightarrow h(x) = ax^2 - (a - 1)x + 2$

Sabendo que a > 0, o gráfico de **h** tem concavidade voltada para cima. Além disso, intercepta o eixo **y** no ponto de ordenada 2. Por fim, temos que f(1) = 3 e g(1) = 0, ou seja, h(1) = f(1) + g(1) = 3.

Portanto, o gráfico que mais representa a função h(x) é o da alternativa C.

Questão 03 – Letra A

Comentário: Por simetria, verificamos que as raízes são 0 e 10. Sendo a função $y = ax^2 + bx + c$, temos:

$0 + 10 = -\frac{b}{a} \Rightarrow b = -10a$ e

$0.10 = \frac{c}{a} \Rightarrow c = 0$

Substituindo na função, temos $y = ax^2 - 10ax$.

Para x = 5, temos y = –5.

Assim, $-5 = a.(5)^2 - 10.a.5 \Rightarrow a = \frac{1}{5}$.

Logo, $b = -10.\frac{1}{5} = -2$.

Portanto, temos $y = \frac{1}{5}x^2 - 2x$.

Questão 07 – Letra D

Comentário: Sejam **x** o número de aumentos de R$ 1,50 e **y** a arrecadação.

$y = (6 + 1{,}50x)(460 - 10x) \Rightarrow y = -15x^2 + 630x + 2\,760$

O número de aumentos para que a arrecadação seja máxima é dado por:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{630}{-30} = 21$$

Portanto, o preço da inscrição, em reais, deve ser igual a $6 + 21.1{,}50 = 37{,}50$.

Questão 09 – Letra B

Comentário:

$L(x) = -x(x - k) \Rightarrow L(x) = -x^2 + kx$

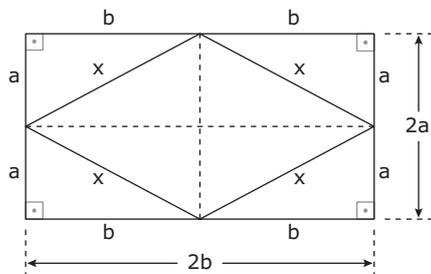
Lucro máximo: **y**

$\Delta = k^2 - 4.(-1).0 = k^2$

$$y = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{k^2}{-4} = \frac{k^2}{4}$$

Logo, $k^2 = 4y \Rightarrow k = 2\sqrt{y}$.

Questão 10 – Letra B

Comentário:

$$A_{losango} = \frac{2a.2b}{2} = 2ab$$

$4a + 4b = 24 \Rightarrow a + b = 6 \Rightarrow b = 6 - a$

$A_{losango} = 2a(6 - a) \Rightarrow A_{losango} = -2a^2 + 12a$

Abscissa do vértice: $a_v = \frac{12}{2(-2)} = 3$

Logo, $b = 6 - 3 = 3$.

$x^2 = a^2 + b^2 = 3^2 + 3^2 = 18 \Rightarrow x = 3\sqrt{2}$ cm

Questão 11 – Letra A

Comentário: Seja a função $y = ax^2 + bx + c$. Sabemos que:

i) $-\frac{b}{a} = 6 \Rightarrow b = -6a$

ii) $\frac{c}{a} = 5 \Rightarrow c = 5a$

Logo, a função pode ser como $y = ax^2 - 6ax + 5a$.
Além disso, temos que:

$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -4 \Rightarrow \Delta = 16a \Rightarrow b^2 - 4ac = 16a \Rightarrow$

$36a^2 - 4.a.5a = 16a \Rightarrow 16a^2 - 16a = 0 \Rightarrow$

$a(a - 1) = 0 \Rightarrow a = 0$ (não convém) ou $a = 1$

Portanto, a função é dada por $y = x^2 - 6x + 5$.
Coordenadas do vértice:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2} = 3$$

Portanto, V(3, –4).

Questão 12 – Letra C

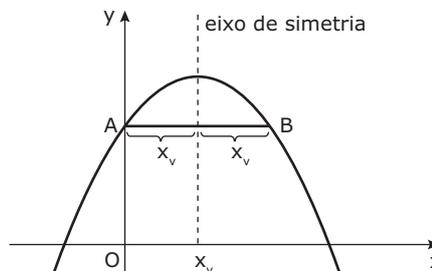
Comentário: Área do triângulo ROS:

$$S = \frac{(2 + 2T)(30 - T)}{2} \Rightarrow S = -T^2 + 29T + 30$$

O tempo necessário para que a área seja máxima corresponde à abscissa do vértice.

$$T_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{29}{-2} = 14{,}5 \text{ s}$$

Questão 14 – Letra D

Comentário:

$$AB = 2.x_v = 2.\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{b}{a}$$

Questão 15 – Letra D

Comentário: A área do quadrado interno é igual a:

$$A = 8^2 - 4.\frac{x(8 - x)}{2} \Rightarrow A = 2x^2 - 16x + 64$$

$\Delta = (-16)^2 - 4.2.64 = 256 - 512 = -256$

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{-256}{8} = 32$$

Logo, o valor mínimo de **A** é 32 cm².

Questão 19 – Letra E

Comentário:

f: [0, 5] → ℝ; $f(x) = x^2 - 6x + 8$

Vértice:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2} = 3 \qquad V = (3, -1)$$

$y_v = (3)^2 - 6.3 + 8 = -1$ (valor mínimo)

Daí, o valor máximo ocorre para x = 0. Temos:

$f(0) = 0^2 - 6.0 + 8 = 8$ (valor máximo)

A diferença é igual a $8 - (-1) = 8 + 1 = 9$.

Observe que $f(5) = 5^2 - 6.5 + 8 = 3$ não é o valor máximo da função.

Seção Enem

Questão 01 – Letra D

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 5

Habilidade: 21

Comentário: Como **V** é o valor, em reais, arrecadado por dia com a venda do álcool, temos:

$V = (10\,000 + 100x)(1{,}50 - 0{,}01x) \Rightarrow$

$V = 15\,000 - 100x + 150x - x^2 \Rightarrow V = 15\,000 + 50x - x^2$

Questão 02 – Letra E

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 5

Habilidade: 21

Comentário:

$R(x) = k.x(P - x) \Rightarrow R(x) = -kx^2 + kPx$

Como $k > 0$, temos $-k < 0$, ou seja, trata-se de uma parábola com concavidade voltada para baixo. Além disso, uma das raízes da função é igual a zero. Portanto, o gráfico correspondente é o da alternativa E.

Questão 03 – Letra B

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 5

Habilidade: 21

Comentário: O número de pessoas que corresponde à máxima rapidez de propagação do boato corresponde à abscissa do vértice. Para P = 44 000, temos:

$R(x) = kx(44\,000 - x) \Rightarrow R(x) = -kx^2 + 44\,000kx.$

Assim:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{-44\,000k}{-2k} = 22\,000$$

Portanto, o número de pessoas deve ser igual a 22 000.

Questão 04 – Letra D

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 5

Habilidade: 21

Comentário:

$P = r \cdot i^2$

$P = k \cdot E$

$k.E = r.i^2 \qquad E = \frac{r.i^2}{k}$

Como **r** e **k** são constantes reais, temos uma função do segundo grau na variável **i**. Portanto, o melhor gráfico que representa a relação entre **E** e **i** é o da alternativa D.

Questão 05 – Letra B

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 5

Habilidade: 21

Comentário: Sejam C(x) e V(x) as expressões para o custo de fabricação de **x** unidades e o seu valor de venda, respectivamente. Logo:

$C(x) = 3x^2 + 232$ e $V(x) = 180x - 116$

O lucro de **x** unidades é determinado pela diferença do preço de venda pelo custo de fabricação de **x** unidades, ou seja:

$L(x) = V(x) - C(x) \Rightarrow L(x) = -3x^2 + 180x - 348$

Portanto, a quantidade máxima de unidades a serem vendidas para se obter o lucro máximo é:

$x_V = -\frac{b}{2a} \qquad x_V = 30$

MÓDULO – C 06

Função composta e função inversa

Exercícios de Fixação

Questão 01 – Letra D

Comentário: De acordo com o gráfico da função **f**, f(f(x)) = 2 para todo f(x) = 0, ou seja, para todas as raízes de **f**.

Como a função **f** tem 3 raízes, então para esses três elementos f(f(x)) = 2.

Questão 02 – Letra C

Comentário: Sabe-se que:

$f(x) = 2x - 1$ e $f(g(x)) = x^2 - 1$

Logo: $f(g(x)) = 2.g(x) - 1 = x^2 - 1 \qquad g(x) = \frac{x^2}{2}$

Questão 03 – Letra E

Comentário: Basta substituir os valores dados em suas respectivas funções. O resultado será obtido através dos gráficos. Assim:

$f \circ g \circ f^{-1}(2) = f(g(f^{-1}(2))) = f(g(1)) = f(3) = 4$

Portanto, $f \circ g \circ f^{-1}(2) = 4$.

Questão 04 – Letra A

Comentário: Como f(3) = 2.3 + 1 = 7 e g(3) = 3.3 + 1 = 10, temos:

$f(g(3)) - g(f(3)) = f(10) - g(7) = 2.10 + 1 - (3.7 + 1) \Rightarrow$

$f(g(3)) - g(f(3)) = 21 - 22 = -1$

Questão 05 – Letra D

Comentário: Como $f(f(x)) = 9x + 8$ e $f(x) = ax + b$, temos:

$f(f(x)) = a.f(x) + b = 9x + 8 \Rightarrow a(ax + b) + b = 9x + 8$

$\underbrace{a^2x + b\overbrace{(a + 1) = 9x + 8}}$ $\quad a^2 = 9 \quad a = 3 \quad$ ou $a = -3$

Podemos considerar as duas situações:

Para $a = -3$, temos $b = -4$ e $f(x) = -3x - 4$. Além disso:

$f^{-1}(x) = \dfrac{-x-4}{3}$

Para $a = 3$ temos $b = 2$ e $f(x) = 3x + 2$. Assim, $f^{-1}(x) = \dfrac{x-2}{3}$.

Logo, a única afirmativa correta é a alternativa D.

Exercícios Propostos

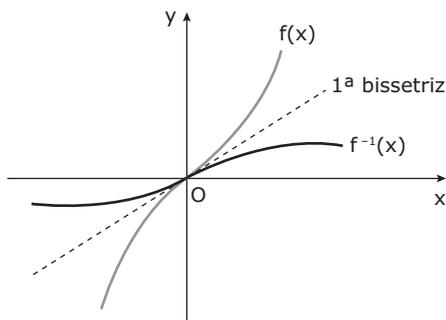
Questão 01 – Letra C

Comentário:

$f(\overset{1}{f(x)}) = 4$

Temos que $f(x) = 1$ corresponde a 3 valores de **x**.

Questão 03 – Letra D

Comentário: Os gráficos são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Questão 04 – Letra D

Comentário: Consideremos $r = 2x + 1$, então, $x = \dfrac{r-1}{2}$.

Assim, $f(r) = 2\dfrac{r-1}{2} + 4 \qquad f(r) = r + 3$.

Por outro lado, se $s = x + 1$ então:

$x = s - 1$ e $g(s) = 2(s - 1) - 1 \Rightarrow g(s) = 2s - 3$

Desse modo, $f \text{ o } g(x) = f(2x - 3) = 2x - 3 + 3 = 2x$

Questão 05 – Letra E

Comentário:

$f(2x + 3) = 4x^2 + 6x + 1$

Fazendo $2x + 3 = k$, temos $x = \dfrac{k-3}{2}$.

Logo, $f(k) = 4\left(\dfrac{k-3}{2}\right)^2 + 6\left(\dfrac{k-3}{2}\right) + 1$

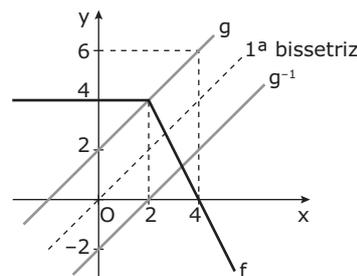
Então:

$f(1 - x) = 4\left(\dfrac{1-x-3}{2}\right)^2 + 6\left(\dfrac{1-x-3}{2}\right) + 1 \Rightarrow$

$f(1 - x) = (-2 - x)^2 + 3(-2 - x) + 1 \Rightarrow$

$f(1 - x) = x^2 + x - 1$

Questão 06 – Letra C

Comentário:

$g(x) = ax + b$

$g(0) = a.0 + b = 2 \Rightarrow b = 2$

$g(4) = 4a + 2 = 6 \Rightarrow a = 1$

$g(x) = x + 2$

Cálculo de $g^{-1}(x)$:

$x = y + 2 \Rightarrow y = x - 2 \Rightarrow g^{-1}(x) = x - 2$

Determinação de $f(x)$:

$f(x) = cx + d$ (pois $x \geq 2$)

$f(2) = 2c + d = 4$ e $f(4) = 4c + d = 0$

$\begin{cases} 2c + d = 4 \\ 4c + d = 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = -2x + 8$

A) $f(h(4)) = ?$

$h(4) = f(4) - g(4) = 0 - 6 = -6$

$f(h(4)) = f(-6) = 4$

$g^{-1}(4) = ?$

$g^{-1}(4) = 4 - 2 = 2$ (incorreto)

B) $h(x) = 0 \Rightarrow f(x) - g(x) = 0 \Rightarrow f(x) = g(x)$

Ocorre para $x = 2$ (incorreto).

C) $f(h(0)) = ?$

$h(0) = f(0) - g(0) = 4 - 2 = 2$

$f(2) = 4$

$g(h(0)) = ?$

$g(2) = 4$ (correto)

Logo, $f(h(0)) = g(h(0))$.

D) $h(x) = 4 - x - 2 = -x + 2$ (incorreto)

(decrescente para $x \leq 2$)

Questão 07 – Letra D

Comentário: A função **f** é constante para $2 \leq x \leq 4$. Sabemos que $\pi \cong 3{,}14$, então, $f(\pi) = f(2)$. Analisando o gráfico, para $x \leq 2$, temos:

$f(x) = ax + b$

$f(0) = 3 \Rightarrow b = 3$

$f(1) = 2 \Rightarrow a . 1 + 3 = 2 \Rightarrow a = -1$

$f(x) = -x + 3$

$f(2) = -2 + 3 = 1$

Portanto, $f(f(\pi)) = f(\underset{1}{f(2)}) = f(1) = 2$

Questão 08 – Letra D

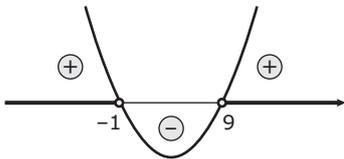
Comentário:

$f(x) = ax - 8 \Rightarrow f(1) = a - 8 \Rightarrow$

$f(f(1)) = f(a - 8) = a(a - 8) - 8 = a^2 - 8a - 8 > 1 \Rightarrow$

$a^2 - 8a - 9 > 0$

$\Delta = (-8)^2 - 4.1.(-9) = 64 + 36 = 100$

$a = \frac{8 \pm 10}{2} \Rightarrow a' = -1 \text{ e } a'' = 9$

Logo, $a < -1$ ou $a > 9$.

Portanto, o menor valor inteiro positivo possível para **a** é 10 (múltiplo de 5).

Seção Enem

Questão 01 – Letra D

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 5

Habilidade: 21

Comentário: Considere um sistema de eixos cartesianos coincidindo com as linhas norte-sul e leste-oeste indicadas na figura, sendo **O** a origem desse sistema. A trajetória do robô Sojourner é uma função da forma f(x)= ax + b. Temos:

$f(0) = 4 \Rightarrow a.0 + b = 4 \Rightarrow b = 4$

$f(-2) = 0 \Rightarrow a.(-2) + 4 = 0 \Rightarrow -2a = -4 \Rightarrow a = 2$

Logo, temos $f(x) = 2x + 4$.

A função que descreve a trajetória do robô Opportunity é dada pela função inversa de f(x). Temos:

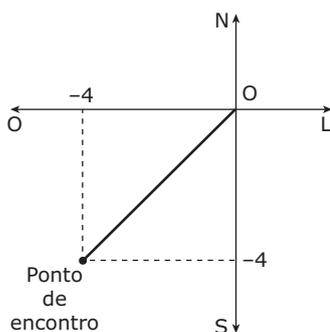
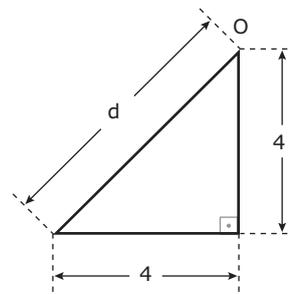
$x = 2y + 4 \Rightarrow y = \frac{x - 4}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x - 4}{2}$

O encontro dos robôs ocorre para $f(x) = f^{-1}(x)$:

$2x + 4 = \frac{x - 4}{2} \Rightarrow 4x + 8 = x - 4 \Rightarrow 3x = -12 \Rightarrow x = -4$

Substituindo em f(x), temos:

$f(-4) = 2.(-4) + 4 = -8 + 4 = -4$

O ponto de intersecção é (–4, –4). Assim, temos:

Sendo **d** a distância do ponto de encontro ao ponto **O**, temos o seguinte modelo:

$d^2 = 4^2 + 4^2 \Rightarrow d^2 = 32 \Rightarrow d = 4\sqrt{2}$

Considerando $\sqrt{2} = 1,4$, temos $d = 4.1,4 = 5,6$.

Logo, os robôs irão se encontrar a 5,6 km de **O**, aproximadamente.

Questão 02 – Letra A

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 5

Habilidade: 21

Comentário:

- Determinação de **φ**:

  $\varphi = 8x + 11$

- Determinação de **σ**:

  $\sigma = (\varphi + 13)^2 \Rightarrow \sigma = (8x + 11 + 13)^2 \Rightarrow$

  $\sigma = (8x + 24)^2 = [8(x + 3)]^2 = 64(x + 3)^2 \Rightarrow$

  $\sigma = 64(x^2 + 6x + 9)$

MÓDULO – D 05

Polígonos

Exercícios de Fixação

Questão 01 – Letra B

Comentário: Um polígono regular de **n** lados contém **n** ângulos internos e $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonais.

Como queremos o polígono em que o número de lados é igual ao número de diagonais, então:

$n = \frac{n(n-3)}{2} \Rightarrow n^2 - 5n = 0 \Rightarrow n = 5$, pois $n > 0$

Logo, o polígono regular que contém o mesmo número de lados e diagonais é o pentágono.

Questão 02 – Letra D

Comentário: Seja **x** o número de ângulos externos do polígono regular dado.

Como a soma dos ângulos externos de um polígono é 360º e cada ângulo externo vale 20º, então:

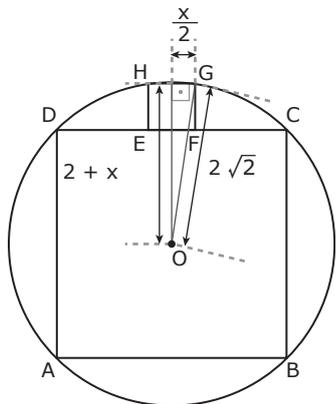
$x.20º = 360º \Rightarrow x = 18$

Logo, o polígono contém n = 18 lados.

Assim, o número de diagonais **d** é:

$d = \frac{n(n-3)}{2} \Rightarrow d = \frac{18(18-3)}{2} \Rightarrow d = 135$

Questão 03 – Letra A

Comentário: Observe a figura com seus dados. Temos um triângulo retângulo de catetos $\frac{x}{2}$ e $2 + x$ e hipotenusa $2\sqrt{2}$. Assim, aplicando o Teorema de Pitágoras:

$$\left(2\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(2 + x\right)^2 \qquad 8 = \frac{x^2}{4} + 4 + 4x + x^2$$

$$32 = x^2 + 16 + 16x + 4x^2 \qquad 5x^2 + 16x - 16 = 0$$

$$x = \frac{-16 \pm \sqrt{576}}{10} \qquad x = 0{,}8 \text{ ou } x = -4 \text{ (não convém)}$$

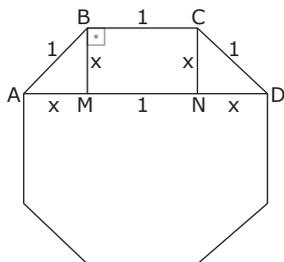
Logo, o lado do quadrado EFGH é 0,8 cm.

Questão 04 – Letra B

Comentário: Sabendo que o polígono tem 20 diagonais, temos:

$$d = \frac{n\left(n - 3\right)}{2} \qquad 20 = \frac{n^2 - 3n}{2} \qquad 40 = n^2 - 3n$$

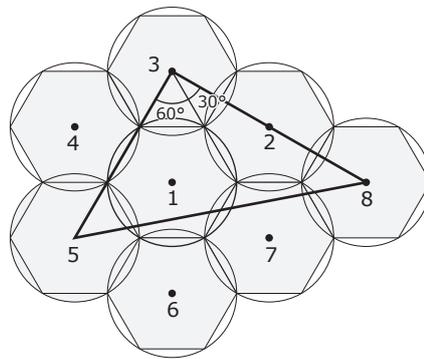
$$n^2 - 3n - 40 = 0 \qquad n = 8 \text{ ou } n = -5 \text{ (não convém)}$$

Logo, trata-se de um octógono regular. Observe a figura a seguir com seus dados.

Por se tratar de um octógono regular, cada ângulo interno vale 135°; logo, o triângulo AMB é retângulo isósceles, assim como o triângulo CND. Calculando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$1^2 = x^2 + x^2 \qquad x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Portanto, o segmento AD equivale a $1 + 2x = 1 + \sqrt{2}$.

Questão 05 – Letra D

Comentário: Observe a figura com seus dados. Sabendo que os hexágonos são regulares e congruentes, seus lados têm as mesmas medidas dos raios dos círculos.

$d_{3,8} = 4.$(altura do triângulo equilátero de lado 1)

$$d_{3,8} = 4.\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$d_{3,5} = 3$$

$d_{5,8}$ = hipotenusa do triângulo “538”

$$(d_{5,8})^2 = (d_{3,8})^2 + (d_{3,5})^2$$

$$d_{5,8} = \sqrt{12 + 9} = \sqrt{21}$$

Exercícios Propostos

Questão 03 – Letra D

Comentário: Sendo a_e a medida, em graus, dos ângulos externos do polígono convexo regular ABCD..., temos:

$$2.a_e + 132º = 180º \Rightarrow a_e = 24º$$

Considere que o polígono convexo regular tenha **n** ângulos externos congruentes. Logo:

$$a_e = \frac{S_e}{n} \Rightarrow a_e = \frac{360º}{n} \Rightarrow$$

$$24º = \frac{360º}{n} \Rightarrow n = 15$$

Portanto, esse polígono é um pentadecágono.

Questão 07 – Letra B

Comentário: Seja um polígono regular, de **n** lados.
O número de diagonais que partem de cada vértice desse polígono regular é dado por d = n – 3.

Já o número de diagonais de um hexágono é:

$$d = \frac{n(n-3)}{2} \Rightarrow d = \frac{6(6-3)}{2} \Rightarrow d = 9$$

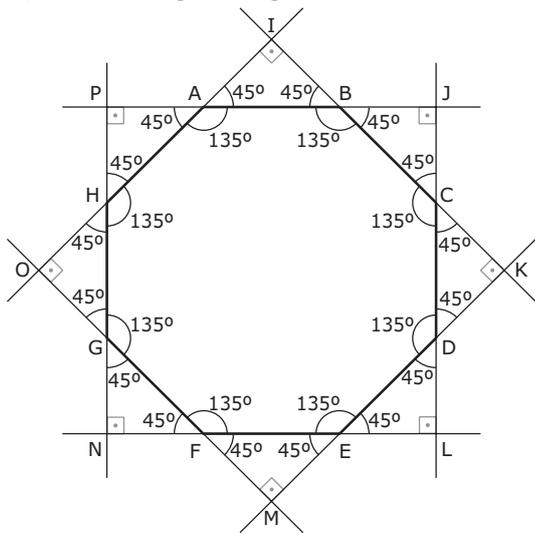
Por hipótese, o número de diagonais, a partir de cada um dos vértices do polígono regular, é igual ao número de diagonais do hexágono. Logo:

$$n - 3 = 9 \Rightarrow n = 12$$

Assim, temos um polígono regular de 12 lados, em que cada ângulo interno tem medida igual a:

$$a_i = \frac{S_i}{n} = \frac{(n-2)180º}{n} = \frac{(12-2)180º}{12} = 150º$$

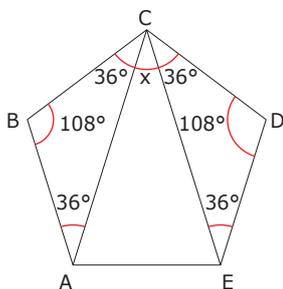
Questão 09 – Letra D

Comentário: Prolongando todos os lados de um octógono regular ABCDEFGH, obtemos uma estrela de vértices IJKLMNOP. Assim, considere a figura a seguir com seus dados.

Portanto, a soma das medidas dos ângulos internos dos vértices dessa estrela é 8.90 = 720º.

Questão 10 – Letra C

Comentário: O pentágono ABCDE é regular e seus ângulos internos possuem a seguinte medida.

$$a_i = \frac{(n-2)180°}{n} \qquad a_i = \frac{(5-2)180°}{5} \qquad a_i = 108°$$

Observando a figura a seguir, temos:

O Δ ABC é isósceles e congruente ao Δ CDE; logo, como o ângulo interno do pentágono vale 108°, temos:

$36° + x + 36° = 108° \Rightarrow x = 36°$

Portanto, o ângulo ACE = 36°.

Questão 11 – Letra B

Comentário: Considere que um dos polígonos convexos tenha **n** lados.

Logo, ele terá $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonais.

Por hipótese, o outro polígono convexo terá n + 6 lados e $\frac{n(n-3)}{2} + 39$ diagonais.

Como o segundo polígono tem n + 6 lados, então ele terá $\frac{(n+6)(n+6-3)}{2}$ diagonais. Daí:

$$\frac{n(n-3)}{2} + 39 = \frac{(n+6)(n+6-3)}{2} \Rightarrow$$

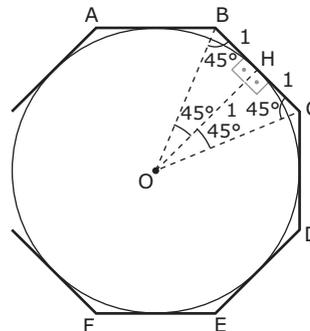
$n^2 - 3n + 78 = n^2 + 9n + 18 \Rightarrow n = 5$

Assim, um dos polígonos tem 5 lados e $\frac{5(5-3)}{2} = 5$ diagonais.

Consequentemente, o outro polígono tem 5 + 6 = 11 lados e 5 + 39 = 44 diagonais.

Portanto, o número total de vértices e diagonais dos dois polígonos é: 5 + 11 + 5 + 44 = 65

Questão 12 – Letra D

Comentário: Seja um polígono regular de **n** lados circunscritos em um círculo de raio 1 cm.

Como OB = OC e traçando o raio OH = 1, temos que BH = HC = 1, pois BC = 2.

Logo, temos dois triângulos retângulos isósceles BHO e CHO.

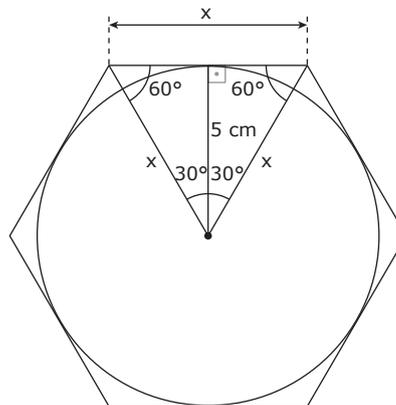
Assim, $B\hat{O}H = C\hat{O}H = 45º$.

Daí, o ângulo central desse polígono regular de **n** lados vale $B\hat{O}C = B\hat{O}H + C\hat{O}H = 90º$. Logo:

$$a_c = \frac{360º}{n} \Rightarrow 90º = \frac{360º}{n} \Rightarrow n = 4$$

Portanto, o número de lados desse polígono é igual a 4.

Questão 14 – Letra A

Comentário: O hexágono regular pode ser dividido em seis triângulos equiláteros; logo:

O raio da circunferência inscrita é perpendicular ao lado do hexágono, logo, pelo Teorema de Pitágoras temos:

$$\text{sen } 60° = \frac{5}{x} \qquad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5}{x} \qquad x = \frac{10\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$$

Portanto, o perímetro do hexágono é igual a $6.\frac{10\sqrt{3}}{3} = 20\sqrt{3}$ cm

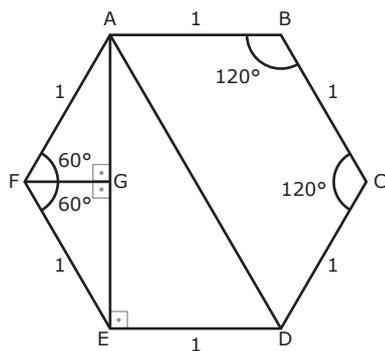
Questão 17 – Letra B

Comentário: Sendo **n** o número de lados do polígono e de acordo com as hipóteses, temos:

$2.130º + (n - 2).128º = (n - 2).180º \Rightarrow 52n = 364 \Rightarrow n = 7$

Portanto, temos um polígono de 7 lados.

Questão 18 – Letra E

Comentário: Observe a figura a seguir que representa a geometria da situação.

A medida do ângulo interno do hexágono regular é

$$a_i = \frac{(n-2)180°}{n} \quad a_i = \frac{(6-2)180°}{6} \quad a_i = 120°$$

O Δ AFE é isósceles e o segmento FG é mediatriz do segmento AE; logo, Δ AFG ≡ Δ EFG. Utilizando as relações trigonométricas no Δ AFG, temos que:

$$\text{sen } 60° = \frac{AG}{1} \quad AG = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

AE é uma das diagonais do hexágono, então:

$$AE = AG + GE \quad AE = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \quad AE = \sqrt{3}$$

Para determinar a medida da diagonal AD, basta aplicar o Teorema de Pitágoras no Δ AED, assim:

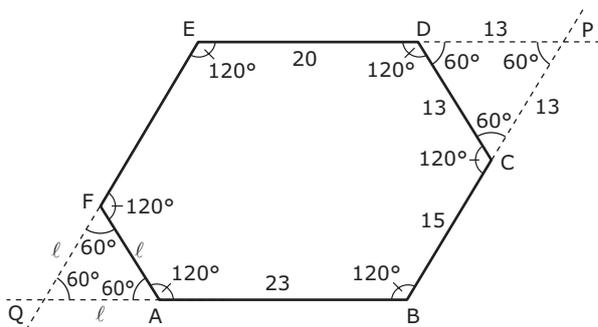
$$AD^2 = AE^2 + ED^2 \quad AD^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2 \quad AD^2 = 4 \quad AD = 2$$

O hexágono possui $d = \frac{n(n-3)}{2}$ $d = \frac{6.3}{2}$ $d = 9$ diagonais.

Entre as nove diagonais, seis medem $\sqrt{3}$ e três medem 2; logo, a soma dos quadrados de todas as diagonais é:

$$6\left(\sqrt{3}\right)^2 + 3.2^2 = 18 + 12 = 30$$

Questão 20

Comentário: Considere a figura a seguir com seus dados.

Como o hexágono é equiângulo, então cada ângulo interno mede:

$$a_i = \frac{S_i}{n} = \frac{(n-2).180°}{n} = \frac{(6-2).180°}{6} = 120°$$

Prologando os segmentos ED e BC e sendo P = ED ∩ BC, temos: $P\hat{D}C = P\hat{C}D = 60°$

Daí, o triângulo PDC é equilátero de lado 13 e:

PB = PC + CB ⇒ PB = 13 + 15 ⇒ PB = 28 e

EP = ED + DP ⇒ EP = 20 + 13 ⇒ EP = 33

Prolongando os segmentos EF e BA e sendo Q = EF ∩ BA, temos $Q\hat{F}A = Q\hat{A}F = 60°$.

Daí, o triângulo QFA é equilátero de lado ℓ.

Logo, EPBQ é um paralelogramo, em que:

EP = QB ⇒ 33 = 23 + ℓ ⇒ ℓ = 10, ou seja, FA = 10 e

PB = EQ ⇒ 28 = EF + ℓ ⇒ EF = 28 − 10 ⇒ EF = 18

Portanto, o perímetro, em cm, do hexágono ABCDEF é:

2p = AB + BC + CD + DE + EF + FA ⇒

2p = 23 + 15 + 13 + 20 + 18 + 10 ⇒

2p = 99

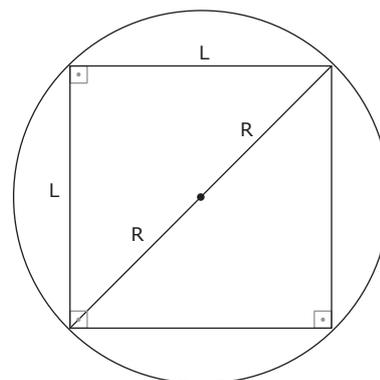
Seção Enem

Questão 01 – Letra A

Eixo cognitivo: IV

Competência de área: 2

Habilidade: 9

Comentário: De acordo com os dados do enunciado, podemos extrair a seguinte figura da situação.

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo formado, temos:

$$(2R)^2 = (L)^2 + (L)^2 \quad 4R^2 = 2L^2 \quad R^2 = \frac{L^2}{2} \quad R = \frac{L}{\sqrt{2}}$$

Perceba que na figura apresentada temos a situação-limite e, portanto, o valor de **R** poderá ser igual ou maior ao apresentado. Logo:

$$R \geq \frac{L}{\sqrt{2}}$$

Questão 02 – Letra B

Eixo cognitivo: IV

Competência de área: 2

Habilidade: 9

Comentário: Para não haver falhas ou superposição de ladrilhos, é necessário que a soma dos ângulos internos dos ladrilhos em cada vértice seja 360º.

Como o arquiteto deseja utilizar uma combinação de dois tipos diferentes de ladrilhos, sendo um deles octogonal, então o outro tipo de ladrilho é o quadrado, pois 135º + 135º + 90º = 360º.

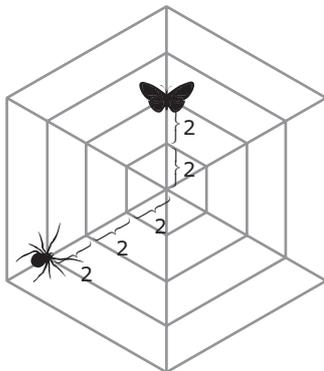
Logo, em torno de cada vértice teremos dois ladrilhos octogonais e um ladrilho quadrado.

Questão 03 – Letra C

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 2

Habilidade: 8

Comentário:

De acordo com a figura, os hexágonos regulares estão igualmente espaçados. Sendo assim, a aranha percorrerá 5 espaços de 2 cm, ou seja, a aranha percorrerá 10 cm.

Logo, temos:

2 cm ––––– $\frac{1}{2}$ s

10 cm ––––– x

$$x = \frac{10.\frac{1}{2}s}{2} \quad x = 2{,}5\ s$$

Portanto, a aranha gastará 2,5 segundos para alcançar o inseto.

Questão 04 – Letra D

Eixo cognitivo: III

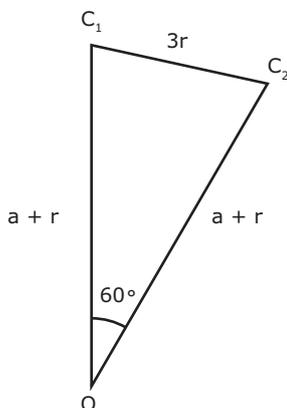
Competência de área: 2

Habilidade: 8

Comentário: Para um rolamento de exatamente 6 esferas, temos um polígono regular de 6 lados.

Sendo assim:

$$a_c = \frac{360°}{n} = \frac{360°}{6} = 60°$$

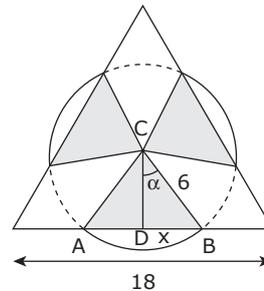
Logo, considere o triângulo a seguir com seus dados.

Como o triângulo OC_1C_2 é isósceles com um ângulo de 60°, então esse triângulo é equilátero e, assim: a + r = 3r ⇒ a = 2r

MÓDULO – D 06

Circunferência

Exercícios de Fixação

Questão 01 – Letra C

Comentário: Dado que o triângulo é equilátero e as figuras têm centros no mesmo ponto, observe a figura com seus dados.

$$CD = \frac{1}{3}.\frac{18\sqrt{3}}{2} \quad CD = 3\sqrt{3}$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo BDC:

$$6^2 = \left(3\sqrt{3}\right)^2 + x^2 \quad 36 - 27 = x^2 \quad x^2 = 9 \quad x = 3$$

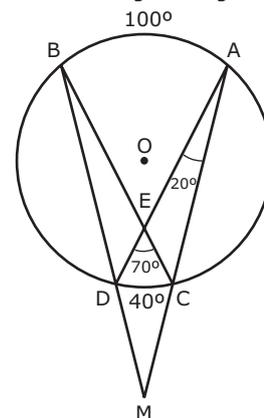
Considerando $B\hat{C}D = \alpha$, temos:

$$\cos\alpha = \frac{CD}{6} \quad \cos\alpha = \frac{3\sqrt{3}}{6} \quad \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \alpha = 30°$$

Assim, $A\hat{C}B$ = 60° e o arco menor AB possui comprimento $C_{AB} = \frac{60°}{360°}.2\pi.6 \quad C_{AB} = 2\pi$. Além disso, os triângulos destacados são iguais, o que faz com que os arcos determinados pelo ângulo central também sejam iguais. Logo, o perímetro (2p) do logotipo é:

$$2p = 3.2\pi + 3.(18 - 2x) \quad 2p = 6\pi + 3.12 \quad 2p = 6.(6 + \pi)$$

Questão 02 – Letra E

Comentário: Considere a seguinte figura com seus dados.

$$D\hat{A}C = \frac{CD}{2} \Rightarrow 20° = \frac{CD}{2} \Rightarrow \overset{\frown}{CD} = 40°$$

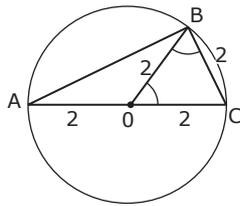
Como o ângulo $C\hat{E}D$ é excêntrico interior, então:

$$C\hat{E}D = \frac{AB + CD}{2} \Rightarrow 70° = \frac{AB + 40°}{2} \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = 100°$$

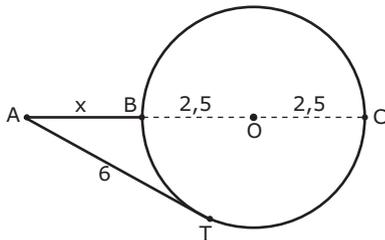
Já o ângulo $A\hat{M}B$ é excêntrico exterior. Então:

$$A\hat{M}B = \frac{AB - CD}{2} \Rightarrow A\hat{M}B = \frac{100° - 40°}{2} \Rightarrow A\hat{M}B = 30°$$

Questão 03 – Letra E

Comentário: De acordo com a figura, temos que OB = OC = raio; logo, o triângulo OBC é equilátero de lado 2 m. Como o triângulo ABC é retângulo, calculemos o Teorema de Pitágoras:

$4^2 = 2^2 + AB^2 \qquad AB = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

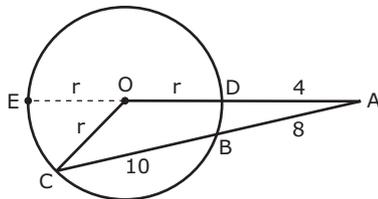
Questão 04 – Letra E

Comentário: Considere a seguinte figura com seus dados.

Como temos as retas AC e AT secante e tangente, respectivamente, à circunferência, então:

$AT^2 = AB.AC \Rightarrow 6^2 = x(x + 5) \Rightarrow$

$x^2 + 5x - 36 = 0 \Rightarrow x = 4$, pois $x > 0$

Questão 05 – Letra E

Comentário: Considere a seguinte figura com seus dados.

Trace o raio OE = r.

Como as retas AE e AC são concorrentes à circunferência, então:

$AD.AE = AB.AC \Rightarrow 4.(4 + 2r) = 8.18 \Rightarrow$

$r = 16$, ou seja, $OC = r = 16$

Assim, o perímetro 2p, em cm, do triângulo AOC mede:

$2P = AO + OC + CA = (4 + 16) + 16 + (10 + 8) = 54$

Exercícios Propostos

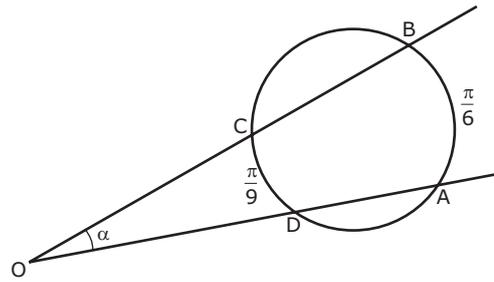
Questão 01 – Letra B

Comentário: A distância **d** percorrida pelo disco está relacionada com o número de voltas, logo:

$d = n.\text{ de voltas } \underbrace{2\pi.R}_{\text{Raio}} \Rightarrow d = 10.(2.3{,}14.1) \quad d = 62{,}8$ ($\pi = 3{,}14$)

Portanto, quando o disco completar 10 voltas o ponto **P** estará em 62,8.

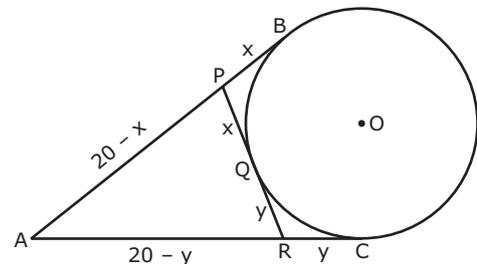
Questão 02

Comentário: Considere a seguinte figura com seus dados.

Como o ângulo **α** é excêntrico exterior, então temos:

$$\alpha = \frac{AB - CD}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{9}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{36}$$

Portanto, $\frac{144}{\pi}.\alpha = \frac{144}{\pi}.\frac{\pi}{36} = 4.$

Questão 07 – Letra B

Comentário: Considere a figura a seguir com seus dados.

Como AB e AC são duas tangentes ao círculo, então AC = AB = 20.

Como PB e PQ são duas tangentes ao círculo, então PB = PQ. Seja PB = PQ = x.

Daí, $AP = AB - PB \Rightarrow AP = 20 - x$.

Como RC e RQ são duas tangentes ao círculo, então RC = RQ. Seja RC = RQ = y.

Daí, $AR = AC - RC \Rightarrow AR = 20 - y$.

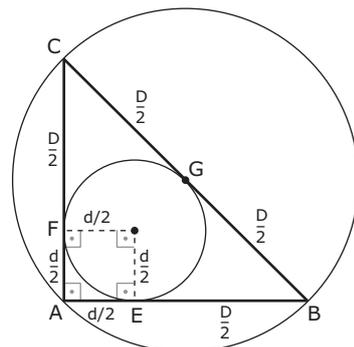
Logo, o perímetro do triângulo APR é:

$2p = AP + PQ + QR + RA \Rightarrow$

$2p = 20 - x + x + y + 20 - y \Rightarrow 2p = 40$

Portanto, o perímetro do triângulo APR é 40 cm.

Questão 08 – Letra C

Comentário: Sejam um triângulo retângulo ABC com uma circunferência de raio **d** inscrita e uma outra circunferência de raio **D** circunscrita.

Traçando os raios da circunferência inscrita, temos:

$AE = \frac{d}{2}$ e $AF = \frac{d}{2}$

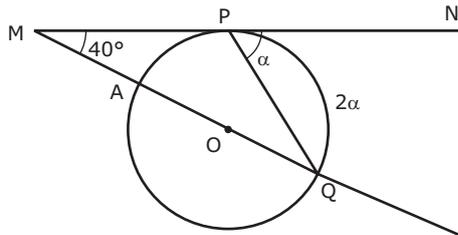
Como CF e CG são duas tangentes ao círculo inscrito e $CG = \frac{D}{2}$, então $CF = CG = \frac{D}{2}$.

Como BG e BE são duas tangentes ao círculo inscrito e $BG = \frac{D}{2}$, então $BE = BG = \frac{D}{2}$.

Logo, o perímetro do triângulo ABC é:

$2p = AB + BC + CA = \frac{d}{2} + \frac{D}{2} + D + \frac{D}{2} + \frac{d}{2} \Rightarrow 2p = d + 2D$

Questão 11 – Letra A

Comentário: Considere a figura a seguir com seus dados.

Seja $N\hat{P}Q = \alpha$.

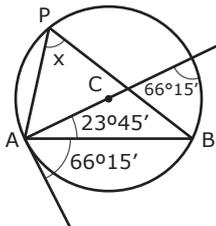
Como o NP é tangente à circunferência e PQ, secante, então o arco $\overset{\frown}{PQ} = 2\alpha$.

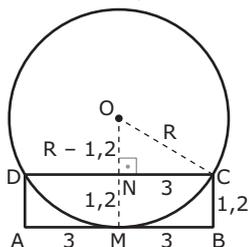
Como a secante MQ passa pelo centro **O** da circunferência, então o arco $\overset{\frown}{APQ} = 180^o$, e o arco $\overset{\frown}{AP} = 180^o - 2\alpha$.

Como o ângulo $Q\hat{M}P = 40^o$ é excêntrico exterior, então:

$Q\hat{M}P = \frac{PQ - AP}{2} \Rightarrow 40^o = \frac{2\alpha - (180^o - 2\alpha)}{2} \Rightarrow \alpha = 65^o$

Questão 13 – Letra E

Comentário: O triângulo ABD é retângulo em **B**, uma vez que AD é diâmetro. Assim, $A\hat{D}B = 66°15'$. Observe que $\hat{D}$ e $\hat{P}$ enxergam o mesmo arco, ou seja, possuem o mesmo ângulo. Logo, $x = 66°15'$.

Questão 15 – Letra A

Comentário: Considere a seguinte figura com seus dados, em que AM = MB = 3 e BC = 1,2.

Seja **R** o raio da circunferência determinada pelos pontos **C**, **M** e **D**.

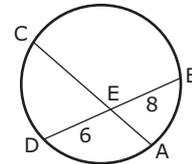
Como MN = BC = 1,2, então ON = R – 1,2 e NC = MB = 3.

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ONC, temos:

$R^2 = (R - 1,2)^2 + 3^2 \Rightarrow R = 4,35$

Portanto, o raio da circunferência determinada pelos pontos **C**, **M** e **D** é 4,35 cm.

Questão 16 – Letra C

Comentário: Temos a seguinte figura com seus dados.

Como temos uma circunferência em que duas cordas AC e BD concorrem em **E**, então:

$EA.EC = EB.ED \Rightarrow EA.EC = 8.6 \Rightarrow EA.EC = 48$ (I)

Foi dado que $\frac{AE}{EC} = \frac{1}{3} \Rightarrow EC = 3.AE$ (II)

Logo, de I e II, temos:

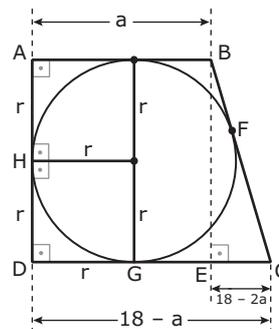
$EA(3.EA) = 48 \Rightarrow EA^2 = 16 \Rightarrow EA = 4$, pois $EA > 0$

Daí, de II temos $EC = 3.4 \Rightarrow EC = 12$.

Assim, $AC = EA + EC \Rightarrow AC = 4 + 12 \Rightarrow AC = 16$

Portanto, o comprimento de AC é 16 cm.

Questão 17 – Letra C

Comentário: Seja um trapézio retângulo ABCD circunscritível:

O comprimento do menor lado de um trapézio retângulo é sempre a base menor. Daí:

$AB + CD = 18 \Rightarrow a + CD = 18 \Rightarrow CD = 18 - a$ e

$BC - AD = 2 \Rightarrow BC - 2r = 2 \Rightarrow BC = 2r + 2$

Como o quadrilátero ABCD é circunscritível, então:

$AB + CD = AD + BC \Rightarrow a + 18 - a = 2r + 2r + 2 \Rightarrow r = 4$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo BEC, temos:

$BC^2 = EC^2 + BE^2 \Rightarrow (2r + 2)^2 = (18 - 2a)^2 + (2r)^2 \Rightarrow$

$(10)^2 = (18 - 2a)^2 + (8)^2 \Rightarrow a = 6$, pois $a > 0$

Portanto, $a + r = 6 + 4 = 10$ cm.

Seção Enem

Questão 01 – Letra C

Eixo cognitivo: IV

Competência de área: 2

Habilidade: 9

Comentário: Como as cidades de Quito e Cingapura encontram-se em pontos diametralmente opostos no globo terrestre e bem próximos à Linha do Equador, então a distância entre elas é:

$d = \frac{2\pi R}{2} \Rightarrow d = \pi.6\ 370 \Rightarrow d \cong 20\ 000$ km

Logo, um avião voando em média 800 km/h gastará um tempo de:

$t = \frac{d}{V} \Rightarrow t = \frac{20\ 000}{800} \Rightarrow t = 25$

Portanto, o avião gastará 25 horas de Quito a Cingapura.

Questão 02 – Letra E

Eixo cognitivo: I

Competência de área: 2

Habilidade: 6

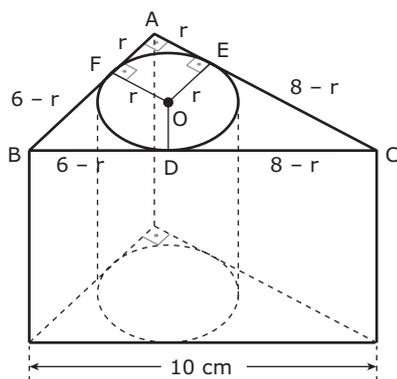
Comentário: O ponto do rolo cilíndrico que está em contato com a pedra tem o dobro da velocidade do centro do rolo. Sendo assim, quando esse rolo dá uma volta completa, o centro se desloca $2\pi R$. Já o ponto do rolo que está em contato com a pedra se desloca $2.(2\pi R) = 4\pi R$.

Questão 03 – Letra B

Eixo cognitivo: II

Competência de área: 2

Habilidade: 7

Comentário: Considere a figura a seguir, em que **r**, em cm, é o raio da perfuração da peça.

O triângulo ABC é retângulo, pois $10^2 = 6^2 + 8^2$.

Logo, OE = OF = AE = AF = r. Daí:

CE = 8 – r e BF = 6 – r

Assim:

CD = CE = 8 – r e BD = BF = 6 – r, pois CD e CE e BD e BF são segmentos tangentes à circunferência.

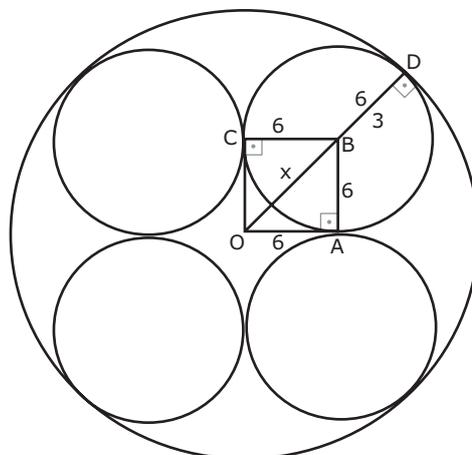
Portanto, $6 - r + 8 - r = 10 \Rightarrow r = 2$.

Questão 04 – Letra D

Eixo cognitivo: IV

Competência de área: 2

Habilidade: 9

Comentário: Considere a figura a seguir com seus dados.

Seja **B** o centro de uma das circunferências menores. Trace os raios BC, BA e BD. AO = BC, pois OABC é um quadrado. Seja BO = x.

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo OAB, temos:

$x^2 = 6^2 + 6^2 \Rightarrow x = 6\sqrt{2}$, pois $x > 0$

Logo, o raio, em cm, do maior tubo vale:

$OD = 6 + x = 6 + 6\sqrt{2} = 6(1 + \sqrt{2})$

Questão 05 – Letra A

Eixo cognitivo: II

Competência de área: 2

Habilidade: 7

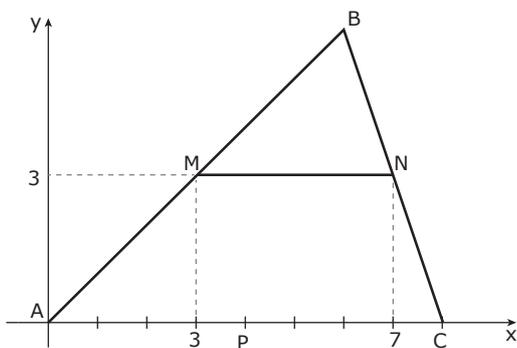
Comentário: Partindo de um do mesmo ponto, o atleta que estiver na parte mais interna da pista será beneficiado, uma vez que vai percorrer um comprimento menor.

MÓDULO – E 09

Posições relativas e distância de ponto a reta

Exercícios de Fixação

Questão 01 – Letra C

Comentário: Como **M** e **N** são pontos médios dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, $\overline{MN}$ é base média de $\overline{AC}$. Percebe-se que a distância entre **M** e **N** corresponde a 4. Logo, AC = 8 e $\overline{AC} // \overline{MN}$. Como $P \in AC$ e é ponto médio, situado no ponto (4, 0), temos A = (0, 0) e C = (8, 0), como vemos na figura a seguir.

Assim, a abscissa do vértice **C** corresponde a 8.

Questão 02 – Letra C

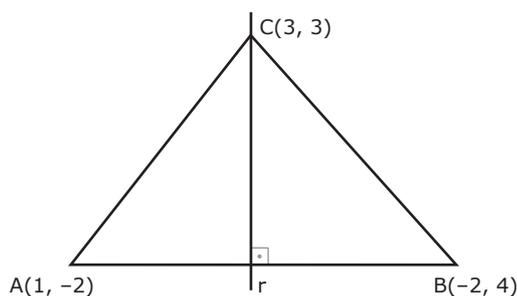
Comentário: A reta **r**, cuja equação é x + 2y + 3 = 0, tem sua forma reduzida $y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ com coeficiente angular $m_r = -\frac{1}{2}$.

Sabemos que t ⊥ r e que P(2, 3) ∈ t, então:

$$m_t = -\frac{1}{m_r} = 2$$

t: y – 3 = 2(x – 2) ⇒ t: 2x – y – 1 = 0

Questão 03 – Letra A

Comentário: Observe a figura a seguir que representa a geometria da situação.

$$m_{AB} = \frac{-2-4}{1-(-2)} \qquad m_{AB} = -2$$

Sabemos que r ⊥ AB, então: $m_r = -\frac{1}{m_{AB}} = \frac{1}{2}$. Temos ainda que o ponto (3, 3) pertence à reta **r**. Assim:

$$r: y - 3 = \frac{1}{2}(x - 3) \qquad r: 2y - x - 3 = 0$$

Questão 04 – Letra B

Comentário: A reta de equação $y = -\frac{3}{4}x + \frac{9}{4}$ tem inclinação $a = -\frac{3}{4}$.

Como queremos retas perpendiculares à anterior, então sua inclinação **m** é:

$$m.a = -1 \Rightarrow m.\ -\frac{3}{4} = -1 \Rightarrow m = \frac{4}{3}$$

Seja (x_0, y_0) um ponto dessa reta. Assim:

$$y - y_0 = \frac{4}{3}(x - x_0) \Rightarrow 3y - 3y_0 - 4x + 4x_0 = 0 \Rightarrow$$

$$-4x + 3y + 4x_0 - 3y_0 = 0$$

Queremos também que a distância da origem (0, 0) à reta $-4x + 3y + 4x_0 - 3y_0 = 0$ tenha 4 unidades de comprimento. Assim:

$$4 = \frac{|-4.0 + 3.0 + 4x_0 - 3y_0|}{\sqrt{(-4)^2 + (3)^2}} \Rightarrow 4 = \frac{|4x_0 - 3y_0|}{5} \Rightarrow$$

$$|4x_0 - 3y_0| = 20 \Rightarrow 4x_0 - 3y_0 = 20 \text{ ou } 4x_0 - 3y_0 = -20$$

Questão 05 – Letra B

Comentário: **A**, **B**, **C** e **D** são vértices consecutivos de um quadrado. As coordenadas no ponto **A** são A(1, 3), e **B** e **D** pertencem à equação x – y – 4 = 0.

Daí, a distância **d** do vértice A(1, 3) à reta x – y – 4 = 0 será a metade da diagonal do quadrado. Logo:

$$d = \frac{|x - y - 4|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} \Rightarrow d = \frac{|1 - 3 - 4|}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$d = \frac{6}{\sqrt{2}} \Rightarrow d = 3\sqrt{2}$$

Logo, a diagonal do quadrado é:

$$D = 2d \Rightarrow D = 2.3\sqrt{2} \Rightarrow D = 6\sqrt{2}$$

A diagonal **D** do quadrado em função do seu lado ℓ é:

$$D = \ell\sqrt{2} \Rightarrow 6\sqrt{2} = \ell\sqrt{2} \Rightarrow \ell = 6$$

Portanto, sua área **A** é $A = \ell^2 \Rightarrow A = 6^2 \Rightarrow A = 36$.

Exercícios Propostos

Questão 01 – Letra E

Comentário: Escrevendo a equação dada na sua forma reduzida, temos:

$$y = 3x + 6 \qquad \begin{matrix} m = 3 \text{ (coef. angular)} \\ n = 6 \text{ (coef. linear)} \end{matrix}$$

y = 0 ⇒ 3x + 6 = 0 ⇒ x = –2

A equação representa uma reta que intercepta o eixo das ordenadas no ponto (0, 6) e das abscissas no ponto (-2, 0).

Questão 05 – Letra C

Comentário:

$$m_{AB} = \frac{y}{x} = \frac{0-6}{10-2} = \frac{-6}{8} = -\frac{3}{4}$$

Como r ⊥ AB, então: $m_r = -\frac{1}{m_{AB}} = \frac{4}{3}$

Como **O** é o centro da circunferência, então **O** é o ponto médio de $\overline{AB}$; assim, O(6, 3). Logo:

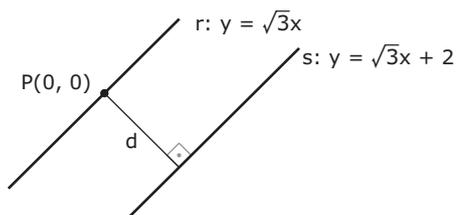
$$r: y - 3 = \frac{4}{3}(x - 6) \Rightarrow 4x - 3y = 15$$

Questão 06 – Letra E

Comentário:

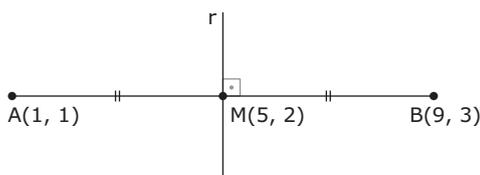
$$\begin{matrix} \cos x = -1 & x = \pi & \\ x = 0 & 2y - 6 = 0 & y = 3 \end{matrix} \Rightarrow P(\pi, 3)$$

$$d(P, r) = \frac{|3(\pi) + 2(3) - 6|}{\sqrt{(3)^2 + (2)^2}} = \frac{3\pi}{\sqrt{13}}$$

Questão 08 – Letra D

Comentário:

$$d(r, s) = d(P, s) = \frac{|\sqrt{3}.(0) - (0) + 2|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{2} = 1$$

Questão 09 – Letra C

Comentário:

$$m_{AB} = \frac{y}{x} = \frac{3-1}{9-1} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$r \perp AB \Rightarrow m_r = -\frac{1}{m_{AB}} = -4$$

Portanto, r: $y - 2 = -4(x - 5) \Rightarrow y = -4x + 22$.

A mediatriz do segmento $\overline{AB}$ encontra o eixo dos **y** quando $x = 0$, logo:

$x = 0 \Rightarrow y = -4.0 + 22$ $y \Rightarrow y = 22$

Questão 10 – Letra C

Comentário:

$$r: y = \frac{2}{3}x - \frac{7}{3}$$

Como $s \perp r$ e $P(2, 3) \in s$, temos:

$$m_s = -\frac{1}{m_r} = -\frac{3}{2}$$

$$s: y - 3 = -\frac{3}{2}(x - 2) \qquad s: 3x + 2y - 12 = 0$$

Questão 12 – Letra A

Comentário:

O ponto médio de AB é $M\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{4+(-6)}{2}\right) = M(2, -1)$.

Chamemos de **r** a reta $2x - 5y + 3 = 0$ e de **s** a reta desejada:

$$r: 2x - 5y + 3 = 0 \qquad y = \frac{2}{5}x + \frac{3}{5}$$

$r \perp s$ e $(2, -1) \in s$

$$m_s = -\frac{1}{m_r} = -\frac{5}{2}$$

$$s: y + 1 = -\frac{5}{2}(x - 2) \qquad s: 5x + 2y - 8 = 0$$

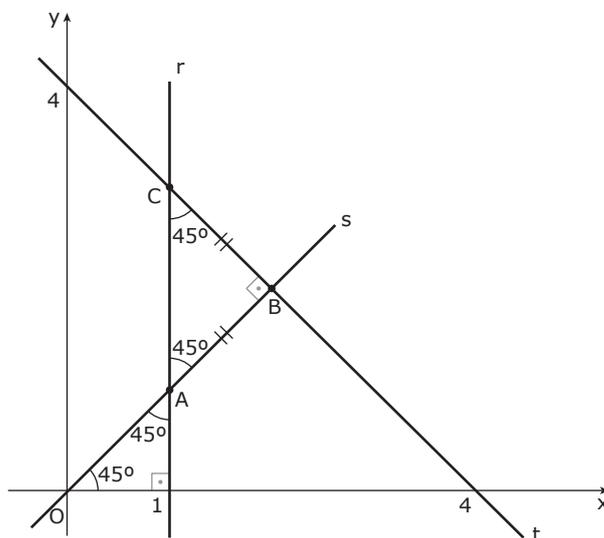
Questão 13 – Letra D

Comentário:

r: $x = 1$

s: $y = x$

t: $y = -x + 4$

Observe que $t \perp s$, logo; ABC é um triângulo retângulo, como se pode ver na figura a seguir.

Seção Enem

Questão 01 – Letra C

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 5

Habilidade: 21

Comentário: A distância mínima é a distância de O(0, 0) à:

reta r = P(−5, 0), Q(−1, −3)

$$m_{PQ} = \frac{0-(-3)}{-5-(-1)} = -\frac{3}{4}$$

$$r: y - 0 = -\frac{3}{4}[x-(-5)] \Rightarrow r = 3x + 4y + 15 = 0$$

$$d(O, r) = \frac{|3.(0) + 4.(0) + 15|}{\sqrt{(3)^2 + (4)^2}} = \frac{15}{5} = 3 \text{ km}$$

Questão 02 – Letra C

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 5

Habilidade: 21

Comentário: A menor distância é a distância do ponto à reta.

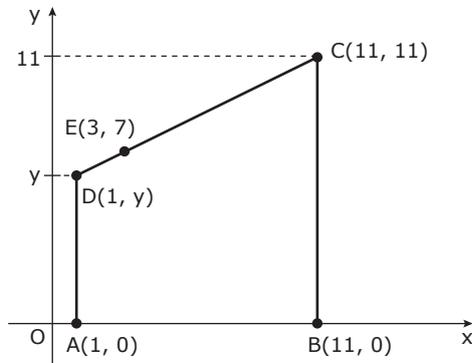
$$d(P, r) = \frac{|2x + 3y - 6|}{\sqrt{(2)^2 + (3)^2}} = \frac{|2.(3) + 3.(\sqrt{13}) - 6|}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = 3$$

MÓDULO – E 10

Áreas e teoria angular

Exercícios de Fixação

Questão 01 – Letra C

Comentário: Considere a figura a seguir com seus dados.

Como o ponto **B** está no eixo Ox, o lado BC é paralelo ao eixo Oy. Assim, se o ponto **C** tem abcissa 11, então B(11, 0).

Como AD é paralelo ao eixo Oy e A(1, 0), então a abscissa do ponto **D** é 1.

Como o ponto E(3, 7) pertence ao lado CD, então a inclinação da reta CD vale:

$$a = \frac{11-7}{11-3} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

Daí, a equação da reta CD é:

$$y - 7 = \frac{1}{2}(x - 3) \Rightarrow y = \frac{x}{2} + \frac{11}{2}$$

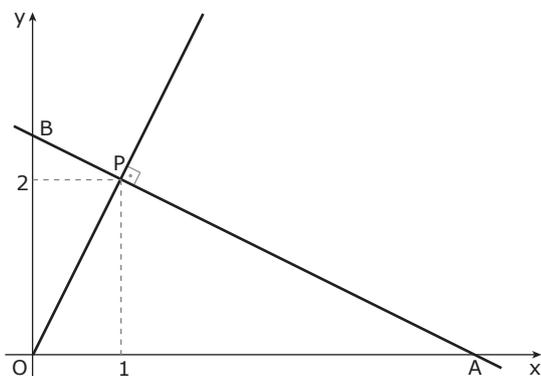
Como o ponto **D**, de abscissa 1, pertence à reta $y = \frac{x}{2} + \frac{11}{2}$, então sua ordenada é $y = \frac{1}{2} + \frac{11}{2} \Rightarrow y = 6$.

Logo, D(1, 6).

Como AD // BC, então o quadrilátero ABCD é um trapézio retângulo, pois BC // Oy.

Assim, sua área **A** é:

$$A = \frac{(BC + AD).AB}{2} \Rightarrow A = \frac{(11+6).10}{2} \Rightarrow A = 85$$

Questão 02 – Letra C

Comentário:

Os pontos (0, 0) e (1, 2) pertencem à reta OP. Então:

$$m_{OP} = \frac{2-0}{1-0} = 2$$

Como AB ⊥ OP e (1, 2) ∈ AB, temos:

$$m_{AB} = -\frac{1}{m_{OP}} = -\frac{1}{2}$$

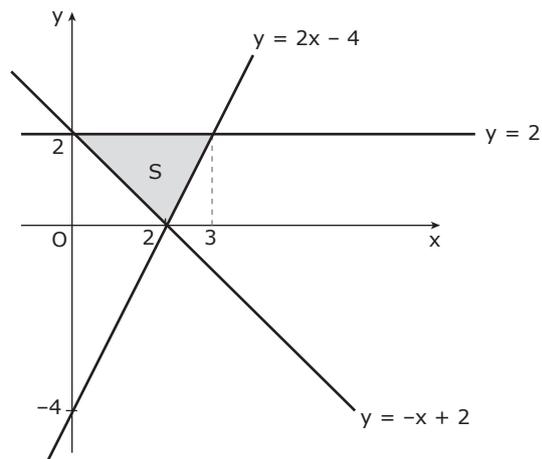
$$AB: y - 2 = -\frac{1}{2}(x-1) \qquad y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

$$A: y = 0 \qquad -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} = 0 \qquad x = 5$$

$$B: x = 0 \qquad y = \frac{5}{2}$$

Assim, a área do triângulo OAB é $A_{OAB} = \frac{5.\frac{5}{2}}{2} = \frac{25}{4}$.

Questão 03 – Letra C

Comentário: Os gráficos dados delimitam um triângulo de área **S**, como se pode perceber na figura a seguir.

Então:

$$2x - 4 = 2 \qquad x = 3$$

$$S = \frac{3.2}{2} \qquad S = 3 \text{ u.a.}$$

Questão 04 – Letra B

Comentário:

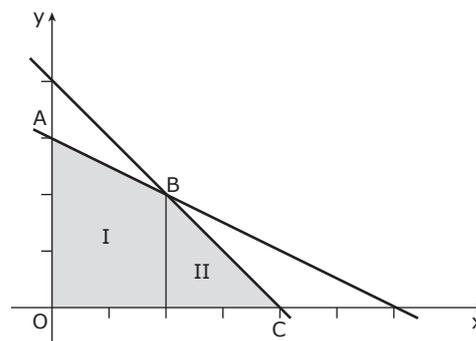
$$x + 2y \leq 6 \qquad y \leq -\frac{x}{2} + 3$$

$$x + y \leq 4 \qquad y \leq -x + 4$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

Representando as inequações dadas no plano cartesiano, temos:

MATEMÁTICA

Para encontrar o ponto **B**, vamos resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} y = -\frac{x}{2} + 3 \\ y = -x + 4 \end{cases} \quad -\frac{x}{2} + 3 = -x + 4 \quad \frac{x}{2} = 1 \quad x = 2 \text{ e } y = 2$$

A área do quadrilátero OABC, com A(0, 3); B(2, 2) e C(4, 0) pode ser dividida em um trapézio e um triângulo retângulo:

$$A_{OABC} = A_I + A_{II} \quad A_{OABC} = \frac{(3+2).2}{2} + \frac{2.2}{2} \quad A_{OABC} = 7$$

Questão 05 – Letra E

Comentário: Seja **r** a reta que passa pelos pontos (1, 0) e (0, 1).

Assim, sua inclinação é $a_r = \frac{1-0}{0-1} \Rightarrow a_r = -1$.

Logo, sua equação é $y - 0 = -1(x - 1) \Rightarrow y = -x + 1$.

Seja **s** a reta que passa pelos pontos (0, 0) e (–2, –1).

Assim, sua inclinação é $a_s = \frac{-1-0}{-2-0} \Rightarrow a_s = \frac{1}{2}$.

Logo, sua equação é $y - 0 = \frac{1}{2}(x - 0) \Rightarrow y = \frac{x}{2}$.

Portanto, a equação da reta **r** é $y = -x + 1$, e a da reta **s** é $y = \frac{x}{2}$.

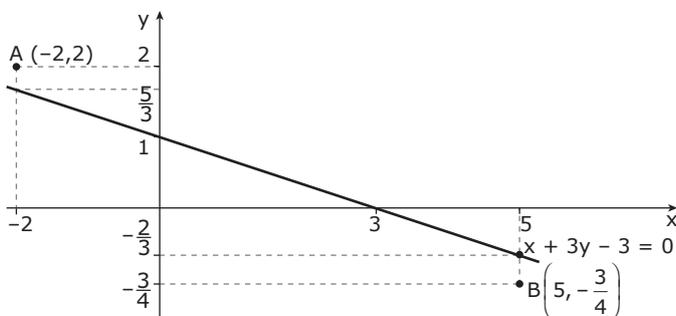
Como o ponto A(x, y) está localizado abaixo da reta **r**, então $y < -x + 1$.

Como o ponto **A** está localizado acima da reta **s**, então $y > \frac{x}{2}$.

Portanto, $\frac{x}{2} < y < -x + 1$.

Exercícios Propostos

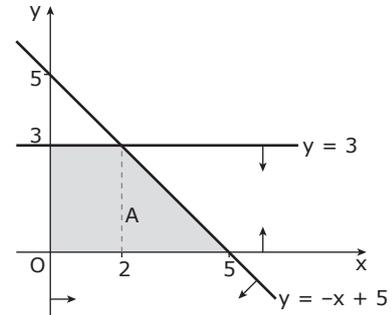
Questão 01 – Letra D

Comentário: A reta x + 3y - 3 = 0 divide o sistema cartesiano em dois semiplanos opostos (o que está acima e o que está abaixo da reta).

Como foi dado que cada um dos pontos está situado em um dos semiplanos, e **A** pertence ao semiplano acima da reta, resta ao ponto **B** o semiplano abaixo da reta. Logo, dentre os valores dados, o único possível com x = 5 é o da alternativa D.

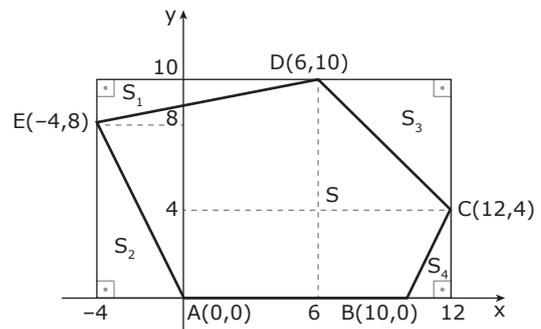
Questão 02 – Letra B

Comentário:

$$\begin{cases} x + y \le 5 & y \le -x + 5 \\ y \le 3 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

Representando as inequações no plano cartesiano, temos:

A região que nos interessa corresponde a um trapézio cuja área é dada por: $A = \frac{(5+2).3}{2} \quad A = 10,5$

Questão 03 – Letra A

Comentário: A partir do polígono dado, para facilitar nossos cálculos, completamos um retângulo no plano cartesiano com seus dados, como ilustrado na figura a seguir.

Dessa forma:

$S = 16.10 - S_1 - S_2 - S_3 - S_4 \Rightarrow$

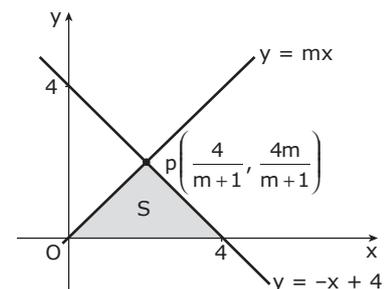
$$S = 16.10 - \frac{2.10}{2} - \frac{8.4}{2} - \frac{6.6}{2} - \frac{4.2}{2} \quad S = 112$$

Questão 04 – Letra C

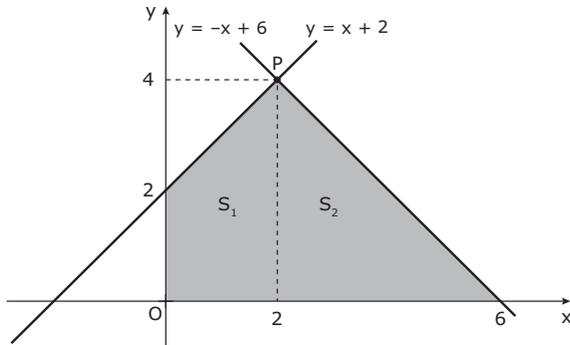
Comentário: Chamemos de **P** o ponto de intersecção das retas y = –x + 4 e y = mx:

$$\begin{cases} y = -x + 4 \\ y = mx \end{cases} \quad mx = -x + 4 \quad x(m+1) = 4$$

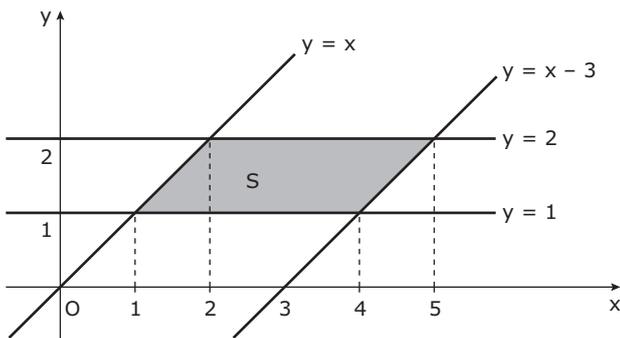
$$x = \frac{4}{m+1} \text{ e } y = \frac{4m}{m+1}$$

Logo:

Assim, a região determinada pelas duas retas e o eixo das abscissas, corresponde a um triângulo de área **S**:

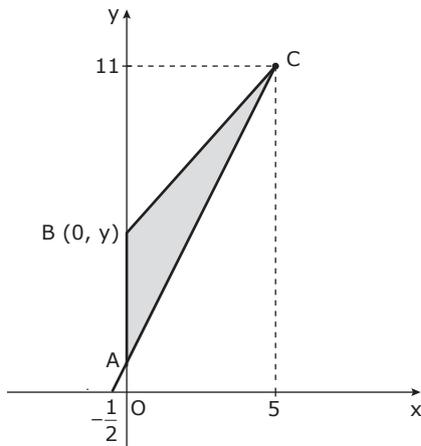
$$S = \frac{4.\frac{4m}{m+1}}{2} \qquad S = \frac{8m}{m+1}$$

Questão 06 – Letra E

Comentário:

- $x + 2 = -x + 6 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$ e $y = 4 \Rightarrow P(2,4)$
- $S = S_1 + S_2 = \frac{(4+2).2}{2} + \frac{4.4}{2} = 6 + 8 = 14$

Questão 07 – Letra B

Comentário:

$S = 3.1 = 3$

Questão 13 – Letra D

Comentário:

$$m_{AC} = \frac{11-0}{5-\left(-\frac{1}{2}\right)} = 2 \Rightarrow \overleftrightarrow{AC}: y - 0 = 2.\left(x + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow y = 2x + 1$$

$$S_{\Delta\,ABC} = \frac{\overset{\text{Base AB}}{(y-1)}.5}{2} = 10 \Rightarrow y = 5$$

Seção Enem

Questão 01 – Letra A

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 5

Habilidade: 21

Comentário: O evento "José e Antônio chegaram ao marco inicial exatamente ao mesmo horário" ocorre quando x = y, e como $0 \le x \le 1$ e $0 \le y \le 1$, temos que o conjunto desses pontos corresponde à diagonal OQ.

Questão 02 – Letra D

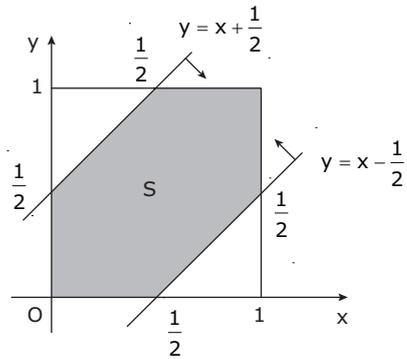
Eixo cognitivo: III

Competência de área: 5

Habilidade: 21

Comentário:

$$y - x \le \frac{1}{2} \qquad y \le x + \frac{1}{2}$$

$$x - y \le \frac{1}{2} \qquad y \ge x - \frac{1}{2}$$

As chances de José e Antônio viajarem juntos são dadas pela área **S**, delimitada pelas 2 retas no quadrado. Logo:

$$S = 1 - 2.\frac{\frac{1}{2}.\frac{1}{2}}{2} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0{,}75 = 75\%$$

MÓDULO – E 11

Equação da circunferência

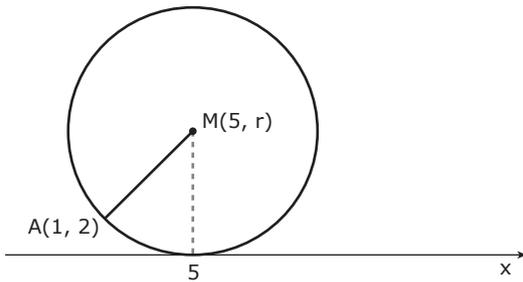
Exercícios de Fixação

Questão 01 – Letra E

Comentário: Dado que A(−1, 4) e B(5, 2), temos como ponto médio M $\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{4+2}{2}\right)$ M(2, 3). Temos ainda que a circunferência passa pela origem (0, 0) e é centrada em **M**. Assim, seja **r** seu raio:

$$r = d_{MO} \qquad r = \sqrt{(2-0)^2 + (3-0)^2} \qquad r = \sqrt{13}$$

Questão 02 – Letra C

Comentário: De acordo com os dados, temos uma circunferência **C** de centro M(5, r), já que **C** é tangente ao eixo das abscissas, e com ponto (1, 2) $\in$ C, como ilustrado na figura a seguir.

Assim:

$r = d_{AM}$ $\quad r = \sqrt{(5-1)^2 + (r-2)^2}$ $\quad \sqrt{16 + r^2 - 4r + 4}$

$r^2 = 20 + r^2 - 4r$ $\quad 4r = 20$ $\quad r = 5$

Questão 03 – Letra A

Comentário: Como os pontos A(–2, 1) e B(0, –3) são as extremidades de um diâmetro de uma circunferência **λ**, então o centro **C** da circunferência tem as seguintes coordenadas:

$C\left(\frac{-2+0}{2}, \frac{1-3}{2}\right) \Rightarrow C(-1, -1)$

Logo, o raio da circunferência é a distância do ponto **C** ao ponto **A**. Daí:

$r = \sqrt{(-1 + 2)^2 + (-1 - 1)^2} \Rightarrow r = \sqrt{5}$

Portanto, a equação da circunferência de centro C(–1, –1) e raio $r = \sqrt{5}$ é:

$(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = (\sqrt{5})^2 \Rightarrow (x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 5$

Questão 04 – Letra B

Comentário: O ponto da circunferência $x^2 + y^2 = 1$ mais próximo do ponto (5, 5) é a interseção da circunferência com a equação da reta bissetriz y = x. Daí:

$x^2 + x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, pois x > 0

Logo, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Assim, o ponto da circunferência mais próximo do ponto (5, 5) é $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, cuja soma das coordenadas vale $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$.

Questão 05 – Letra A

Comentário: Sejam λ_1 e λ_2 as circunferências dadas. Completando os quadrados, temos:

$\lambda_1: x^2 + y^2 - 6y + 9 = -5 + 9$

$x^2 + (y-3)^2 = 4 \quad C_1(0, 3) \quad r_1 = 2$

$\lambda_2: x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 2 = -6 + 9 + 2$

$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 4 \quad C_2(3, 1) \quad r_2 = 2$

A reta que passa pelos centros de λ_1 e λ_2 tem coeficiente angular:

$m = \frac{y}{x} = \frac{1-3}{3-0} = -\frac{2}{3}$

Logo, a reta pode ser representada pela equação:

$y - 3 = -\frac{2}{3}(x - 0) \quad 3y + 2x = 9$

Exercícios Propostos

Questão 01 – Letra A

Comentário: Tem-se:

$x^2 + y^2 + 5x + 4y - 25 = 0$

Adicionando $\frac{25}{4}$ e 4 aos dois lados da equação para que o 1º e o 2º fatores sejam quadrados perfeitos, temos:

$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + (y+2)^2 = 25 + \frac{25}{4} + 4 \quad \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + (y+2)^2 = \frac{141}{4}$

Logo, o centro da circunferência é $\left(-\frac{5}{2}, -2\right)$.

Questão 06 – Letra E

Comentário: Tem-se:

$x^2 + y^2 + 4x - 6y + m = 0$

Adicionando 4 e 9 aos dois lados da equação para que o 1º e o 2º fatores sejam quadrados perfeitos, temos:

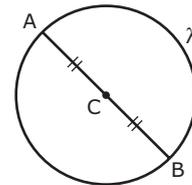
$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = -m + 4 + 9 \Rightarrow$

$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = -m + 13$

$r > 0 \Rightarrow -m + 13 > 0 \Rightarrow 13 > m \Rightarrow m < 13$

Questão 07 – Letra B

Comentário:

$y = 2x - 4 \quad \begin{matrix} A(2, 0) \\ B(0, -4) \end{matrix} \Rightarrow C(1, -2)$

$r = \frac{1}{2}d(A, B) = \frac{1}{2}\sqrt{(2 - 0)^2 + (0 + 4)^2} = \frac{1}{2}.2\sqrt{5} = \sqrt{5}$

Então, $\lambda: (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 5 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$.

Questão 08 – Letra E

Comentário: Manipulando a equação da circunferência, temos:

$x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$

Então, C(2, 2) e r = 2, o que mostra que a circunferência tangencia os eixos coordenados.

Questão 09 – Letra D

Comentário: Sejam **λ** e λ' circunferências concêntricas, temos:

$\lambda: x^2 + y^2 - 2x - 2y - 20 = 0$

$\lambda': x^2 + y^2 - 2x - 2y + c = 0$

$P(5, 4) \in \lambda' \Rightarrow (5)^2 + (4)^2 - 2.(5) - 2.(4) + c = 0 \Rightarrow c = -23$

Portanto, $\lambda': x^2 + y^2 - 2x - 2y - 23 = 0$.

Questão 10 – Letra A

Comentário: De acordo com os dados, temos:

$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 25$

$(3m - 3)^2 + (-4m + 4)^2 = 25 \Rightarrow$

$9m^2 - 18m + 9 + 16m^2 - 32m + 16 = 25 \Rightarrow$

$25m^2 - 50m = 0 \quad \begin{matrix} m = 0 \\ \text{ou} \\ m = 2 \end{matrix}$

Questão 11 – Letra B

Comentário: Representando a circunferência no plano cartesiano, temos:

Por semelhança, temos:

$$\frac{x}{3} = \frac{3\sqrt{2} + 3}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{6 + 3\sqrt{2}}{6}$$

Então, $S_P = 2x = 6 + 3\sqrt{2}$.

Questão 12 – Letra B

Comentário: Representando a equação da circunferência, temos:

$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$

Para y = 0, temos:

$x^2 - 4x + 4 + 1 = 9 \Rightarrow x^2 - 4x - 4 = 0$

$= 16 + 16 = 32$

$$x = \frac{4 \pm 4\sqrt{2}}{2} \qquad x = 2 \pm 2\sqrt{2}$$

Questão 13 – Letra A

Comentário:

$x^2 + y^2 - x + y + c = 0 \Rightarrow$

$$x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 + y + \frac{1}{4} = -c + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$x - \frac{1}{2}\ ^2 + \quad y + \frac{1}{2}\ ^2 = -c + \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$r = \frac{3}{2} \Rightarrow -c + \frac{1}{2} = \frac{9}{4} \Rightarrow c = -\frac{7}{4}$$

Seção Enem

Questão 01 – Letra B

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 5

Habilidade: 21

Comentário: $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 23 \leq 0 \Rightarrow$

$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = 23 + 4 + 9 \Rightarrow$

$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 36 \Rightarrow$ círculo $\begin{matrix} C(2, -3) \\ r = 6 \end{matrix}$

Logo, a área da projeção é: $S = \pi.6^2 = 36\pi$

Como o coeficiente de ampliação é 3, temos que:

$S_{\text{projeção}} = 3.S_{\text{superfície circular}}$

$36\pi = 3.\pi.r^2 \Rightarrow r^2 = 12 \Rightarrow r = 2\sqrt{3}$, pois r > 0

Questão 02 – Letra E

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 5

Habilidade: 21

Comentário: Como as cidades distam 10 km da capital, elas pertencem a uma circunferência de raio 10 e cujo centro é a capital. Logo:

$x^2 + y^2 - 20x + 40y + 400 = 0 \Rightarrow$

$x^2 - 20x + 100 + y^2 + 40y + 400 = -400 + 100 + 400 \Rightarrow$

$(x - 10)^2 + (y + 20)^2 = 100 \Rightarrow \begin{matrix} C(10, -20) \\ r = 10 \end{matrix}$

MÓDULO – E 12

Posições relativas à circunferência

Exercícios de Fixação

Questão 01 – Letra D

Comentário: O raio da circunferência é a distância da origem à reta **t**; como se pode ver na figura a seguir.

t: x – y – 1 = 0

O raio da circunferência será igual à distância da origem à reta **t**; logo:

$$r = d(O, t) = \frac{|0 - 0 - 1|}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Questão 02 – Letra C

Comentário: Pela geometria da situação, temos a seguinte figura.

O centro da circunferência pertence ao eixo das abscissas e os pontos (2, 0) e (8, 0) pertencem à circunferência. Seu diâmetro é 8 – 2 = 6; logo, possui raio 3 e centro C(5, 0). De acordo com as relações métricas no triângulo retângulo, temos:

$4^2 = 5m \qquad m = \frac{16}{5}$

$3^2 = 5n \qquad n = \frac{9}{5}$

$h^2 = \frac{16}{5} \cdot \frac{9}{5} \qquad h = \frac{12}{5}$. Assim, A $\frac{16}{5}, \frac{12}{5}$.

Questão 03 – Letra E

Comentário: Da circunferência $x^2 + y^2 = 25$, temos que seu centro é C(0, 0) e seu raio, r = 5.

A inclinação da reta **r** que passa por C(0, 0) e P(3, 4) é:

$$a_r = \frac{0-4}{0-3} \Rightarrow a_r = \frac{4}{3}$$

Logo, a equação da reta **r** é:

$$y - 0 = \frac{4}{3}(x - 0) \Rightarrow y = \frac{4}{3}x$$

A equação da reta **s** tangente à circunferência $x^2 + y^2 = 25$ no ponto P(3, 4) é perpendicular à reta **r**: $y = \frac{4}{3}x$. Daí:

$$a_s.a_r = -1 \Rightarrow a_s = -\frac{1}{\frac{4}{3}} \Rightarrow a_s = -\frac{3}{4}$$

Logo, a equação da reta **s** que passa por P(3, 4) é:

$$y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 3) \Rightarrow 3x + 4y - 25 = 0$$

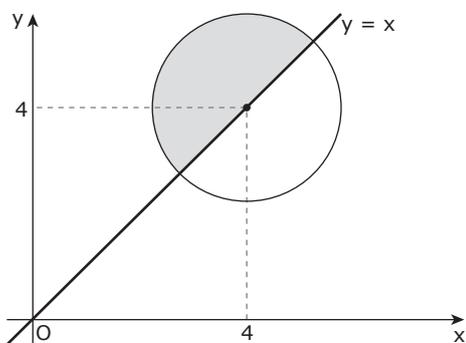
Questão 04 – Letra C

Comentário: A região da placa é definida por:

$$x^2 + y^2 - 8x - 8y + 28 \leq 0$$

Determinando o centro e raio da placa, temos:

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 - 8y + 16 = -28 + 16 + 16$$

$$(x-4)^2 + (y-4)^2 = 4 \qquad \begin{matrix} C(4, 4) \\ r = 2 \end{matrix}$$

Considerando $S_{verm.}$ a área vermelha (em destaque no gráfico) e que a escola vai fazer 12 placas, temos:

$$S_{verm.} = 12.\frac{1}{2}\pi.(2)^2 \quad 75,36\ m^2$$

Como 1 lata pinta 3 m² de placa, serão necessárias:

$$\frac{75,36}{3} = 25,12 \qquad 26 \text{ latas}$$

Questão 05 – Letra B

Comentário: A equação da circunferência de centro P(3, 1) tangente à reta r: 3x + 4y + 7 = 0 tem raio **k**, dado pela distância do ponto **P** à reta **r**. Logo:

$$k = \frac{|3.3 + 4.1 + 7|}{\sqrt{(3)^2 + (4)^2}} \Rightarrow k = 4$$

Portanto, a equação da circunferência de centro P(3, 1) e raio k = 4 é dada por:

$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 4^2 \Rightarrow$

$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 - 16 = 0 \Rightarrow$

$x^2 + y^2 - 6x - 2y - 6 = 0$

Exercícios Propostos

Questão 01 – Letra E

Comentário: Sendo ℓ o lado do triângulo, temos:

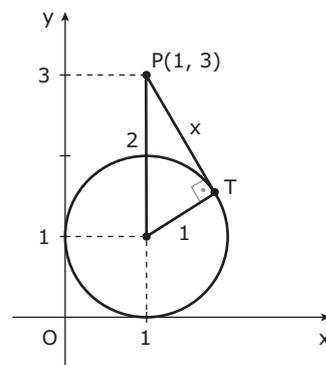
$$\ell = 2 \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$C_{círc.} = \text{Baricentro do triângulo} = 0, \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$R = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Logo, a equação da circunferência é $x^2 + y - \frac{\sqrt{3}}{3}^2 = \frac{1}{3}$.

Questão 03 – Letra A

Comentário: Observe a figura que representa a geometria da situação:

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo, temos:

$2^2 = x^2 + 1^2 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \sqrt{3}$, pois x > 0

Questão 04 – Letra D

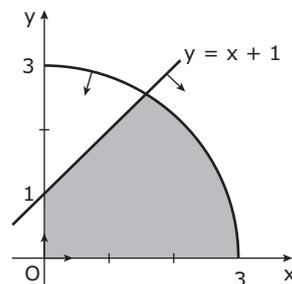
Comentário: O raio da circunferência é igual à distância da origem até a reta **s**, logo:

$$r = d(O, s) = \frac{|3.(0) + 4.(0) - 10|}{\sqrt{(3)^2 + (4)^2}} = \frac{10}{5} = 2$$

Sendo C(0, 0), temos:

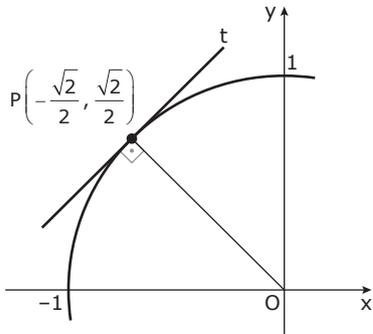
$x^2 + y^2 = 4$

Questão 08 – Letra A

Comentário: $y \leq x + 1$; $x^2 + y^2 \leq 9$; $x \geq 0$; $y \geq 0$

Questão 09 – Letra A

Comentário:

$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \begin{matrix} C(0, 0) \\ r = 1 \end{matrix}$

$$m_{\overleftrightarrow{OP}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - 0}{-\frac{\sqrt{2}}{2} - 0} = -1$$

$$t \perp \overleftrightarrow{OP} \Rightarrow m_t = -\frac{1}{m_{OP}} = 1$$

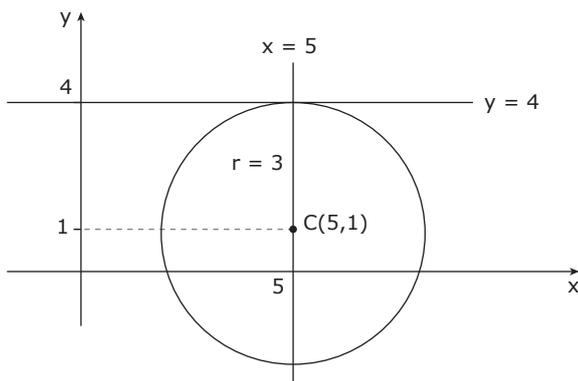
$$t: y - \frac{\sqrt{2}}{2} = 1.\ \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow y = x + \sqrt{2}$$

Questão 10 – Letra E

Comentário:

$C(2, 1) \in r: x + y = 3 \Rightarrow \ell_{corda} = 2R = 2.\frac{5}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$

Questão 13 – Letra C

Comentário: De acordo com as informações dadas, temos que o centro da circunferência é o ponto (5, 1).

Equação da circunferência: $(x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 9$

Para y = 0:

$x^2 - 10x + 25 + 1 = 9 \Rightarrow x^2 - 10x + 17 = 0$

A soma das abscissas será:

$$x_1 + x_2 = -\frac{(-10)}{1} = 10$$

Seção Enem

Questão 01 – Letra C

Eixo cognitivo: III

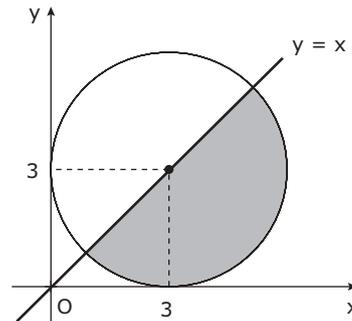
Competência de área: 5

Habilidade: 21

Comentário: $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 9 \leq 0 \Rightarrow$

$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 6y + 9 \leq -9 + 9 + 9 \Rightarrow$

$(x - 3)^2 + (y - 3)^2 \leq 9 \Rightarrow$

círculo $\begin{matrix} C(3, 3) \\ r = 3 \end{matrix}$

A área a ser pintada de rosa é de:

$$S_{Rosa} = \frac{1}{2}\pi.3^2 = \frac{9}{2}\pi\ m^2$$

Como serão 100 bandeiras $\Rightarrow \frac{9}{2}\pi.100 = 450\pi\ m^2$

Como cada lata de tinta cobre 4 m², então o número de latas é dado por:

$$\frac{450\pi}{4} \cong 353{,}25 \Rightarrow \text{n. mínimo} = 354$$

Questão 02 – Letra C

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 5

Habilidade: 21

Comentário:

Residência da ex-mulher = centro
Distância fixa mínima = raio

Logo, os pontos proibidos são: